

Filtri RC e RL

Concetti generali

Il filtro è un quadripolo che seleziona i segnali in base alla loro frequenza; nel senso che trasmette in uscita solo alcune delle “frequenze contenute” nel segnale di ingresso, bloccando tutte le altre.

Per realizzare un filtro è necessario utilizzare componenti il cui comportamento cambia a secondo della frequenza del segnale che li attraversa; questi componenti sono i condensatori e le bobine

I condensatori impiegano un certo tempo per caricarsi e scaricarsi; essi, perciò, sono più sensibili ai segnali di bassa frequenza perché questi segnali, variando lentamente, danno il tempo al condensatore di caricarsi e scaricarsi; per lo stesso motivo i condensatori sono poco sensibili ai segnali di alta frequenza; questi ultimi infatti, variando velocemente, non danno il tempo ai condensatori di adeguarsi.

Le bobine hanno un comportamento opposto rispetto a quello dei condensatori; la tensione che si induce ai capi di una bobina è direttamente proporzionale alla rapidità con cui varia il flusso all'interno della bobina stessa; quindi la tensione indotta cresce proporzionalmente con la frequenza del segnale di ingresso e perciò le bobine sono più sensibili ai segnali di alta frequenza; mentre ignorano praticamente quelli di frequenza molto bassa.

Regime sinusoidale

In generale i filtri vengono studiati a regime sinusoidale; si ipotizza cioè che all'ingresso del filtro sia posto un segnale sinusoidale, o armonico. Questa scelta è dovuta al fatto che quasi tutti gli altri segnali sono composti da un numero più o meno elevato di segnali sinusoidali (le cosiddette armoniche del segnale).

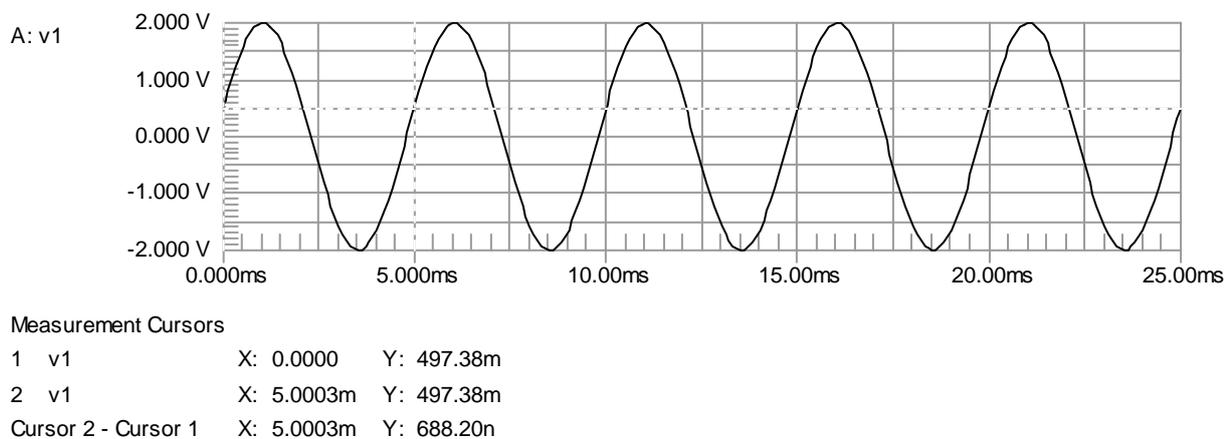


fig. 1

I parametri importanti di un segnale sinusoidale sono:

- il valore di picco V_p (o ampiezza) che è l'escursione massima che il segnale compie attorno allo zero; in fig. 1, $V_p=2V$
- il valore picco picco V_{pp} , che è la differenza tra il valore massimo e quello minimo; in fig. 1, $V_{pp}=4V$
- il valore efficace V_{eff} (o V_{rms}), utile per il calcolo delle potenze. In tutti i segnali periodici, il valore efficace è opportunamente legato al valore di picco; per i segnali sinusoidali $V_{eff}=V_p/\sqrt{2}$. nel nostro caso $V_{eff}=2V/\sqrt{2}=1.4V$
- il periodo T , misurato in sec; nel nostro caso è $T=5ms$
- la frequenza $f = 1/T$, misurata in Hz ; nel nostro caso è $f = 1/T = 200Hz$. la frequenza angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \text{ misurata in rad/sec}$$

Osserviamo che, in fig.1, il segnale, all' inizio della nostra osservazione ($t=0$) ha un valore diverso da zero

circa 0.5V) e perciò la sua fase è diversa da zero.



fig. 2

Il filtro è un quadripolo, nel senso che è una rete elettrica accessibile da due coppie di morsetti; una coppia di morsetti funziona come ingresso, l'altra coppia funziona da uscita (fig.2). In realtà i filtri, come altri quadripoli, sono effettivamente dei tripoli perché la coppia di morsetti di ingresso e quella di uscita hanno un conduttore in comune e, quindi, i morsetti elettricamente distinguibili sono tre.

Per guadagno di tensione A_v di un filtro si intende il rapporto $A_v = \frac{V_{outp}}{V_{inp}}$, dove V_{outp} è il picco del segnale sinusoidale rilevato in uscita e V_{inp} è il picco del segnale di ingresso. Il guadagno di tensione si può calcolare anche eseguendo il rapporto tra i valori picco picco o tra i valori efficaci di V_{out} e V_{in}

Altri guadagni importanti, per tutti i quadripoli, sono quello di corrente $A_I = \frac{I_{outp}}{I_{inp}}$ e quello di potenza

$A_p = \frac{P_{out}}{P_{in}}$; anzi, il guadagno di potenza è estremamente importante perché ci fa capire se il quadripolo è attivo o passivo. I guadagni definiti sono tutti dimensionali.

In tutti i quadripoli passivi il guadagno di potenza non supera mai l'unità, per cui la potenza fornita al carico, al più, è uguale a quella di ingresso.

Nei quadripoli attivi, gli amplificatori ad esempio, il guadagno di potenza è maggiore di 1 (spesso $A_p \gg 1$) e la potenza di uscita è sensibilmente maggiore di quella di ingresso.

Nella discussione che segue noi concentreremo l'attenzione sul guadagno di tensione.

Nei filtri, il guadagno di tensione A_v varia con la frequenza; il diagramma di A_v in funzione della frequenza si chiama risposta in ampiezza del filtro e ci descrive il comportamento del filtro stesso nei confronti del segnale di ingresso.

In figg. 3,4,5 e 6 abbiamo rispettivamente il diagramma della risposta in ampiezza di alcuni filtri. In questi diagrammi sia la frequenza sia A_v sono riportati in scala logaritmica.

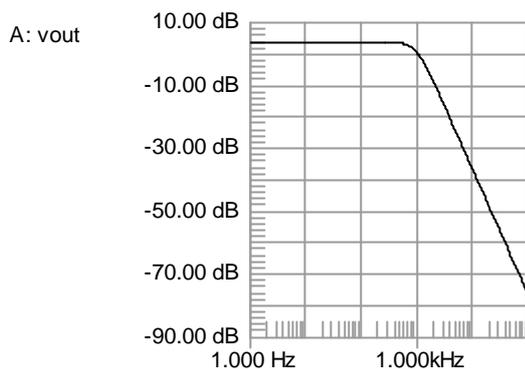


fig. 3 **Filtro passa basso**

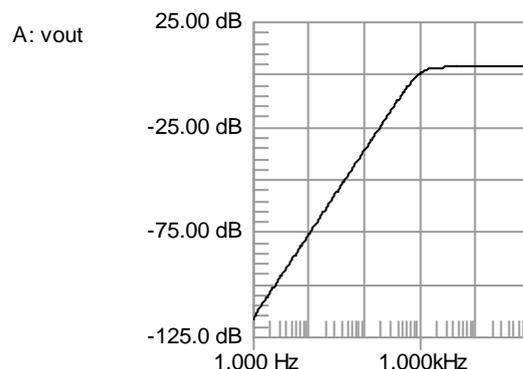
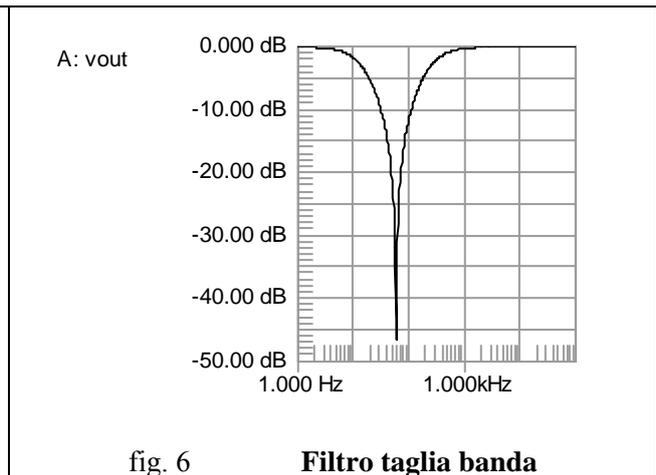
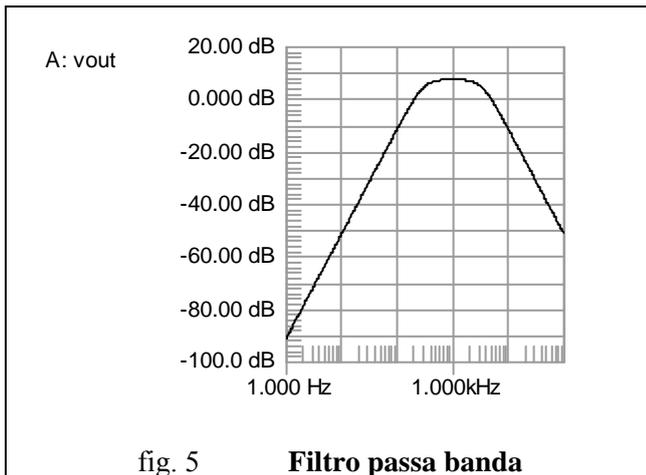


fig. 4 **Filtro passa alto**



Classificazione dei filtri

In base alla loro risposta in ampiezza, i filtri sono classificati in:

- filtro passa basso (low pass LP); questo filtro lascia passare soltanto i segnali sinusoidali la cui frequenza è inferiore ad una prefissata, detta frequenza di taglio (fig.3); nel filtro passa basso, il guadagno assume il suo valore massimo A_{vmax} per $f \rightarrow 0$
- filtro passa alto (high pass HP); questo filtro lascia passare soltanto i segnali sinusoidali la cui frequenza è superiore ad una prefissata, detta frequenza di taglio (fig.4); nel filtro passa alto, il guadagno assume il suo valore massimo A_{vmax} per $f \rightarrow \infty$
- filtro passa banda (band pass BP); questo filtro lascia passare soltanto i segnali sinusoidali la cui frequenza è compresa tra due frequenze di taglio prefissate, la frequenza di taglio inferiore f_L e quella di taglio superiore f_H ; la larghezza di banda del filtro o banda passante BW è $BW = f_H - f_L$ (fig.5); nel filtro passa banda, il guadagno assume il suo valore massimo A_{vmax} in banda passante
- filtro taglia banda, detto anche elimina banda oppure bandastop o anche filtro notch; questo filtro taglia soltanto i segnali sinusoidali la cui frequenza è compresa tra due frequenze di taglio prefissate, quella inferiore f_L e quella superiore f_H ; la larghezza della banda tagliata BW è $BW = f_H - f_L$. Il filtro lascia passare inalterati tutti i segnali sinusoidali la cui frequenza ricade all'esterno della banda tagliata (fig.6)

In figg. 3,4,5 e 6 abbiamo rispettivamente il diagramma della risposta in ampiezza al variare della frequenza dei filtri passa basso, passa alto, passa banda e taglia banda. In questi diagrammi sia la frequenza sia la risposta in ampiezza sono riportati in scala logaritmica.

Nei filtri distinguiamo:

- la banda passante; essa è l'intervallo di frequenze in cui il filtro lascia passare il segnale di ingresso
- la banda attenuata; essa è costituita da tutte quelle frequenze per cui il filtro attenua il segnale di ingresso

Come possiamo notare dalle figg. 3,4,5,6 non appena si entra in banda attenuata, la risposta in ampiezza del filtro comincia a diminuire; più rapida è questa diminuzione e più selettivo è il filtro.

I parametri importanti dei filtri sono:

- il guadagno in banda passante A_{vmax}
- le frequenze di taglio

Le frequenze di taglio sono quelle frequenze, in corrispondenza delle quali il guadagno del filtro si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore che esso ha in banda passante. Se indichiamo il guadagno il guadagno alla frequenza di taglio con $A_v(f_t)$ otteniamo:

$$A_v(f_t) = \frac{A_{v \max}}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \cdot A_{v \max}$$

Alle frequenze di taglio, anche la tensione e la corrente sul carico sono ridotte di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore che esse hanno in banda passante; perciò, la potenza uscente dal filtro, che dipende dal prodotto $V \cdot I$, è la metà rispetto al valore in banda passante

Conclusioni

Se il segnale di ingresso è un segnale complesso costituito cioè da segnali sinusoidali di frequenza diversa, esso sarà quasi sicuramente deformato; infatti il filtro lascerà passare solo alcune delle componenti sinusoidali del segnale, bloccando tutte le altre; il contenuto in frequenza del segnale originario risulterà così alterato ed anche la forma d'onda del segnale verrà modificata.

Esempi di segnali complessi sono l'onda quadra, quella triangolare etc..

Invece, se all'ingresso di un filtro poniamo un segnale sinusoidale (o armonico), cioè un segnale contenente una sola frequenza, esso sarà trasmesso in uscita attenuato oppure inalterato, a secondo se l'unica frequenza che lo compone ricade in banda passante oppure in banda attenuata; il segnale di uscita potrà anche essere sfasato rispetto a quello di ingresso ma manterrà sicuramente la forma d'onda sinusoidale

Filtro passa basso RC

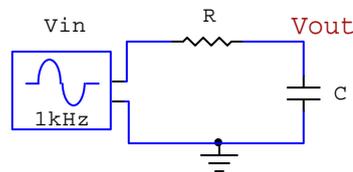


fig. 7

Il circuito di fig. 7 è un filtro passa basso; in pratica esso è un partitore di tensione costituito dalla resistenza R e dall'impedenza Z_c del condensatore; come sappiamo $\bar{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = -jX_c$ e perciò la reattanza capacitiva $X_c = \frac{1}{\omega C}$ è molto elevata alle basse frequenze mentre si riduce molto quando la frequenza del segnale è molto elevata. Di conseguenza:

- se la frequenza del segnale di ingresso è molto piccola, allora il condensatore si comporta come una resistenza molto elevata e il segnale di ingresso cade in gran parte su di esso
- se la frequenza di Vin è molto elevata, allora il condensatore si comporta come una resistenza molto piccola e la tensione ai suoi capi, cioè quella di uscita Vout, è molto piccola (Vin cade quasi tutta sulla resistenza R)

Funzione di trasferimento

Tenendo presente che il nostro circuito è un partitore di tensione, otteniamo:

$$\bar{V}_{out} = \bar{V}_{in} \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

e quindi:

$$\frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Il rapporto $\frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = F(j\omega)$ viene chiamato funzione di trasferimento del filtro proprio perché ci dà informazioni sulle modifiche che il segnale di ingresso ottiene nel trasferimento dall'ingresso verso l'uscita.

Più esattamente, la funzione di trasferimento, che è una funzione complessa della frequenza, ci dice come variano il guadagno del filtro e lo sfasamento che esso produce al variare della frequenza. Il prodotto RC è la costante di tempo τ del condensatore; il suo inverso ha le dimensioni di una pulsazione ed la pulsazione caratteristica ω_t del circuito; la pulsazione caratteristica a sua volta determina la frequenza f_t caratteristica del circuito; più precisamente:

$$\tau = RC \text{ (sec)} \quad , \quad \omega t = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \text{ (rad/sec)} \quad , \quad f t = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau} \text{ (Hz)}$$

E' importante osservare che sia la costante di tempo, sia la pulsazione caratteristica, sia la frequenza caratteristica dipendono solo dai componenti del circuito e restano costanti sino a quando non cambiamo il valore di R e C . Alla luce delle posizioni fatte, la funzione di trasferimento diventa:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega t}} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f t}}$$

Risposta in ampiezza

Il guadagno di tensione del filtro non è altro che il modulo della funzione di trasferimento; cioè

$$A_v = \frac{V_{outp}}{V_{inp}} = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega t}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f t}\right)^2}}$$

Notiamo che:

- per $f \ll f_t$, $A_v \cong 1$; ciò significa che, per frequenze molto più piccole di f_t , il guadagno del filtro ha il suo massimo valore $A_{v \max}$, che è uno; in altri termini, in banda passante, il picco del segnale di uscita è circa uguale al picco del segnale di ingresso. In definitiva il filtro lascia passare i segnali la cui frequenza è molto più piccola di f_t ; e infatti il nostro filtro è di tipo passa basso.
- per $f = f_t$, $A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_{v \max}}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \cdot A_{v \max}$; questo significa che , quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza caratteristica del filtro, il guadagno del filtro, è il 70% del picco del valore che ha in banda passante; la frequenza f_t è perciò la frequenza di taglio del filtro.
- per $f \gg f_t$, $A_v \rightarrow 0$; ciò significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più elevata della frequenza di taglio del filtro, il guadagno del filtro e il picco del segnale di uscita diventano molto piccoli; il filtro, cioè, blocca i segnali la cui frequenza è molto più elevata della frequenza di taglio.

Osservando più attentamente il guadagno per $f \gg f_t$, notiamo che:

$$A_v \cong \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f t}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{f}{f t}} = \frac{f t}{f}$$

dato che 1 è trascurabile rispetto a $\left(\frac{f}{f t}\right)^2$

In definitiva, a frequenze elevate, il guadagno del filtro diminuisce in modo inversamente proporzionale alla frequenza; ciò significa che, quando la frequenza aumenta di un fattore 10, il guadagno di tensione di sminuisce dello stesso fattore.

Se teniamo presente che, nel nostro filtro, $A_{v \max} = 1$, la funzione di trasferimento puo' essere riscritta nel modo seguente:

$$F(j\omega) = \frac{A_{v \max}}{1 + j \frac{f}{f t}}$$

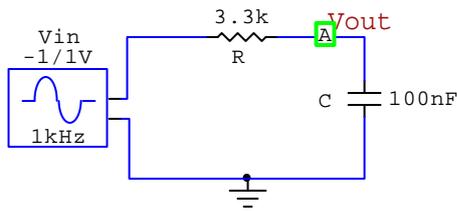
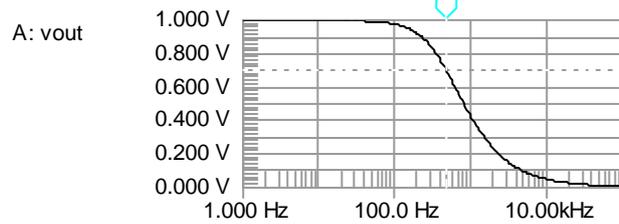


fig. 8



Measurement Cursors
1 vout X: 482.22 Y: 707.13m

fig. 9

In fig. 8 abbiamo lo schema di un filtro passa basso pilotato da un generatore di segnali sinusoidali il cui picco viene mantenuto costantemente a 1V; per questo filtro:

$$\tau = RC = 3.3 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ sec} = 3.3 \cdot 10^{-4} = 0.33 \text{ m sec} = 330 \mu \text{ sec}$$

$$\omega\tau = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.33 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{0.33} \text{ rad / sec} = 3.03 \text{ krad / sec}$$

$$f_t = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi \cdot 0.33 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{2\pi \cdot 0.33} = 482.3 \text{ Hz}$$

In fig. 10 è riportato l'andamento del picco di Vout al variare della frequenza (in scala logaritmica); come possiamo notare, il picco di Vout si mantiene a 1V (uguale a quello di Vin) sino a 100Hz ; per frequenze superiori, il picco di Vout comincia a diminuire e diventa 707 mV alla frequenza di 482.2 Hz, cioè alla frequenza di taglio. Per frequenze maggiori di 482.2Hz il picco di Vout si riduce ulteriormente sino a diventare inapprezzabile.

Decibel

Spesso il guadagno del filtro viene espresso in decibel (dB); più precisamente

$$A_{v\text{dB}} = 20 \text{Log}[A_v]$$

Immediatamente sotto abbiamo una tabella che riporta l'andamento del guadagno in dB in funzione di Av; osserviamo che, quando il guadagno Av varia di un fattore 10, il guadagno in dB varia di 20 dB

Av	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
Av(dB)	-60dB	-40dB	-20dB	0dB	+20dB	+40dB	+60dB

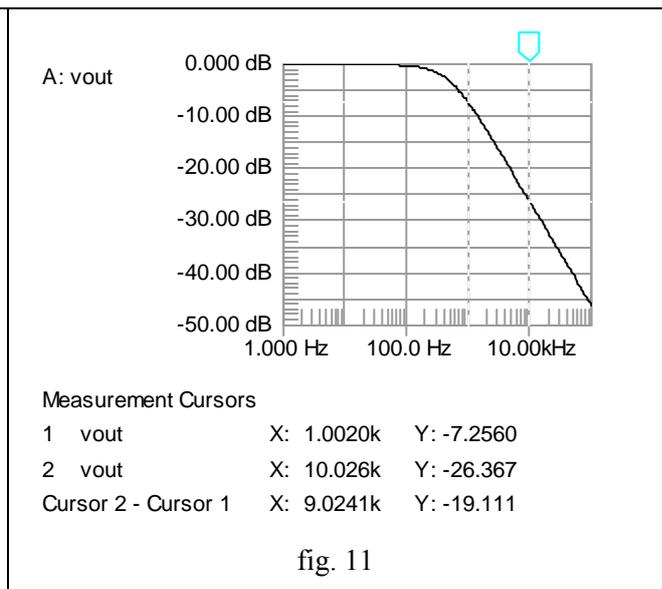
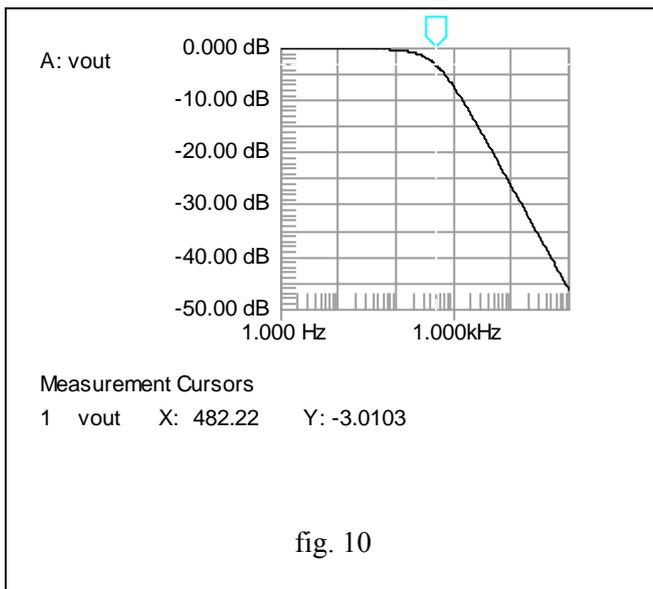
Notiamo che nel filtro passa basso RC :

- per $f \ll f_t$, $A_{v\text{dB}} = 20 \text{Log} A_v \cong 20 \text{Log} 1 = 0 \text{ dB} = A_{v\text{dB max}}$. Dire che il guadagno del filtro è 0dB equivale a dire che il segnale, nell'attraversare il filtro, non viene attenuato. Il massimo valore del guadagno del filtro, espresso in dB, è 0dB.
- Per $f = f_t$ otteniamo

$$A_{v\text{dB}} = 20 \text{Log} A_v \cong 20 \text{Log} \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \text{Log} 1 - 20 \text{Log} \sqrt{2} = 0 - 10 \text{Log} 2 = A_{v\text{dB max}} - 3 \text{ dB}$$

In sostanza, alla frequenza di taglio, il guadagno del filtro diminuisce di 3dB rispetto al valore che esso ha in banda passante (0dB nel nostro caso).

- Per $f \gg f_t$ sappiamo che il guadagno diminuisce in modo inversamente proporzionale alla frequenza; cioè, quando la frequenza aumenta di un fattore 10 (di una decade), il guadagno Av diminuisce di un fattore 10 (di 20 dB); di conseguenza, a frequenze elevate, il guadagno del filtro diminuisce di 20dB/decade



In fig. 10 è riportato il guadagno del filtro, espresso in dB, in funzione della frequenza (in scala logaritmica); come ci aspettavamo, dal diagramma si rileva che:

- a frequenze basse il guadagno del filtro è 0dB; i segnali di bassa frequenza non vengono attenuati
- alla frequenza di taglio (482.2Hz), il guadagno del filtro è -3dB, cioè 3dB in meno rispetto al valore che ha in banda passante.

La fig. 11 invece mostra che, in banda attenuata, quando la frequenza del segnale aumenta di una decade, da 1kHz a 10kHz nel nostro caso, il guadagno diminuisce di quasi 20dB.

Il diagramma del guadagno, espresso in dB, in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica, si chiama diagramma di Bode del guadagno.

Risposta in fase

Lo sfasamento φ prodotto dal filtro varia, ovviamente, con la frequenza e coincide con l'argomento della funzione di trasferimento $F(j\omega) = \frac{Av_{max}}{1 + j \frac{f}{ft}}$

L'argomento di una frazione complessa, come è la nostra $F(j\omega)$, è la differenza tra l'argomento del numeratore φ_N e l'argomento del denominatore φ_D ; nel nostro caso $Av_{max}=1$, cioè è un numero reale e positivo per cui il suo argomento è nullo, mentre $\tan \varphi_D = \frac{f}{ft}$; allora:

$$\varphi(f) = -\varphi_D = -\arctan\left(\frac{f}{ft}\right)$$

Il diagramma dello sfasamento φ in funzione della frequenza f è la risposta in fase del filtro.

Notiamo che:

- per $f \ll ft$, $\varphi \rightarrow 0$; ciò significa che, per frequenze molto più piccole di ft , lo sfasamento prodotto dal filtro è molto piccolo
- per $f=ft$, $\varphi = -\arctan\left(\frac{f}{ft}\right) = -\arctan(1) = -45^0$; questo significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza di taglio del filtro, la tensione di uscita è in ritardo di 45^0 rispetto a quella di ingresso.
- per $f \gg ft$, $\varphi \rightarrow -90^0$; ciò significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più elevata della frequenza di taglio del filtro, il ritardo tra la tensione di uscita e quella di ingresso tende a 90^0 .

Dovevamo aspettarci che la tensione di uscita fosse in ritardo rispetto a quella di ingresso: infatti V_{out} non è altro che la tensione ai capi del condensatore che, come sappiamo, si adegua con ritardo alle variazioni della tensione di ingresso.

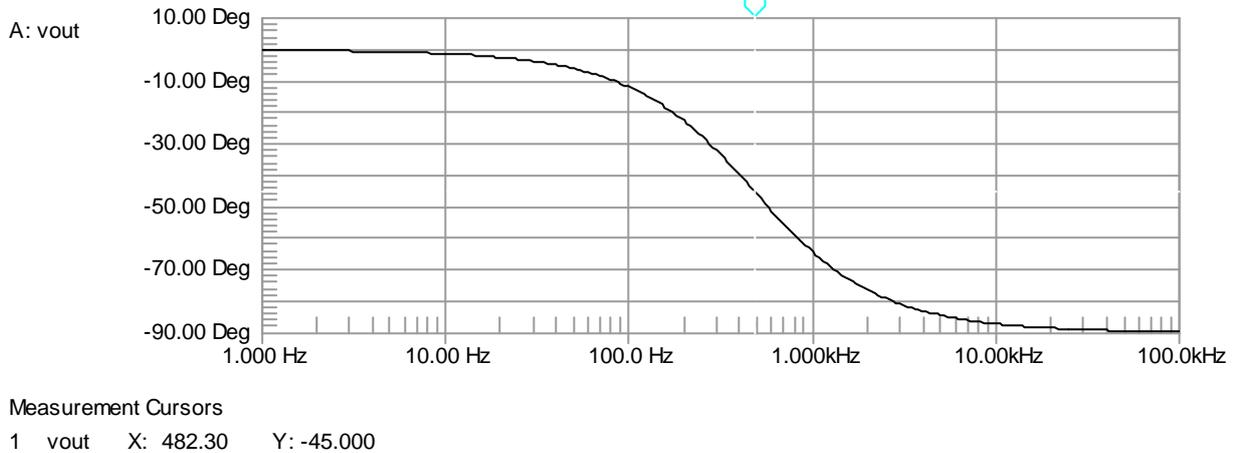


fig. 12

La fig. 12 mostra la risposta in fase del nostro filtro: in banda passante lo sfasamento tra uscita ed ingresso è trascurabile, mentre è di 45° in ritardo alla frequenza di taglio. A frequenze elevate, il ritardo tra uscita ed ingresso tende verso i 90° .

Sappiamo che la reattanza capacitiva varia con la frequenza; in particolare alla frequenza di taglio la reattanza del condensatore è uguale al valore della resistenza R ; infatti:

$$X_c(ft) = \frac{1}{2\pi \cdot ft \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{2\pi \cdot RC} \cdot C} = R$$

In definitiva, alla frequenza di taglio del nostro filtro:

- il guadagno di tensione diventa il 70% del suo massimo valore (quello in banda passante)
- lo sfasamento tra uscita e ingresso diventa 45° (in ritardo)
- la reattanza capacitiva diventa uguale alla resistenza vista ai suoi capi
- la potenza sul carico si dimezza rispetto al valore in banda passante

La tensione uscente dal filtro molto spesso va pilotare un carico resistivo R_L ; lo schema del nostro filtro diventa allora quello di fig.13

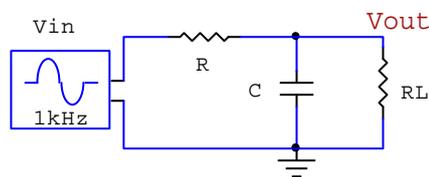


fig. 13

La funzione di trasferimento del filtro ha sempre la forma:

$$F(j\omega) = \frac{A_{v \max}}{1 + j \frac{f}{f_t}}$$

in cui $f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$; nel calcolo della costante di tempo bisogna tener conto che adesso la resistenza vista dal condensatore è $R_{e q} = R \parallel R_L$

A_{vmax} è il guadagno del filtro in banda passante, cioè per $f \rightarrow 0$; alle basse frequenze, il condensatore è un tasto aperto e il filtro diventa un partitore resistivo; perciò:

$$A_{vmax} = \frac{V_{outp}}{V_{inp}} = \frac{R_L}{R + R_L}$$

Filtro passa basso RL

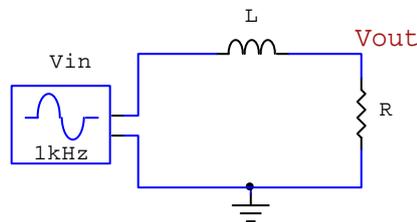


fig. 14

Il filtro passa basso RL (fig. 14) ha una struttura duale rispetto a quella del filtro passa basso RC; nel senso che, nel filtro passa basso RL, la resistenza e la reattanza hanno posizioni scambiate rispetto a quelle che occupano nel passa basso RC. Ciò è dovuto al fatto che la bobina ha un comportamento duale rispetto a quello del condensatore perché, quando l'una si comporta da resistenza elevata, l'altro si comporta da resistenza di piccolo valore e viceversa.

Anche questo filtro è un partitore costituito dalla impedenza induttiva $Z_L = j\omega L$ e dalla resistenza R; perciò:

- alle basse frequenze la reattanza induttiva $X_L = \omega L = 2\pi \cdot fL$ è trascurabile, la tensione che cade su di essa è piccola e quindi i segnali sinusoidali di bassa frequenza si trasferiscono quasi inalterati sulla resistenza R, cioè in uscita.
- viceversa alle alte frequenze la reattanza induttiva è molto elevata e perciò i segnali di alta frequenza sono bloccati dalla bobina; la tensione di uscita è, quindi, molto piccola e il circuito si comporta da filtro passa basso.

Funzione di trasferimento

Come nel filtro passa basso RC, la funzione di trasferimento è:

$$F(j\omega) = \frac{\overline{V_{out}}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_t}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_t}}$$

dove $f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$ anche in questo caso e $\tau = \frac{L}{R}$ è la costante di tempo della bobina; il suo inverso è,

ovviamente, la pulsazione caratteristica $\omega_t = 2\pi \cdot f_t$.

Anche stavolta occorre rilevare che sia la costante di tempo, sia la pulsazione caratteristica, sia la frequenza caratteristica dipendono solo dai componenti del circuito e restano costanti sino a quando non cambiamo il valore di R e L.

Risposta in ampiezza

Al solito, il guadagno di tensione A_v è il modulo di $F(j\omega)$; perciò:

$$A_v = |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_t}\right)^2}}$$

Ribadiamo che A_v è adimensionale in quanto è il rapporto tra due tensioni, quella di uscita e quella di ingresso. Anche stavolta:

- per $f \ll f_t$, $A_v \cong 1 = A_{vmax}$ (0dB); quindi, per frequenze molto più piccole di f_t , il picco del

segnale di uscita è circa uguale al picco del segnale di ingresso; cioè il filtro lascia passare i segnali la cui frequenza è molto più piccola di f_t ; e infatti il nostro filtro è di tipo passa basso.

- per $f = f_t$, $A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ ($-3dB$); questo significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza caratteristica del filtro, il picco del segnale di uscita è il 70% del picco del segnale di ingresso; la frequenza f_t è la frequenza di taglio del filtro.
- per $f \gg f_t$, $A_v \rightarrow 0$, più precisamente $A_v \cong \frac{f_t}{f}$; perciò, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più elevata della frequenza di taglio del filtro, il guadagno del filtro diminuisce con una pendenza di $20dB/dec$ e il picco del segnale di uscita diventa molto piccolo; il filtro, cioè, blocca i segnali la cui frequenza è molto più elevata della frequenza di taglio.

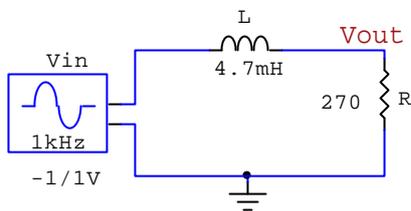
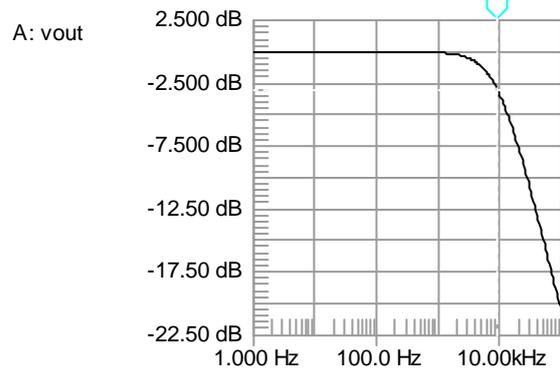


fig. 15



Measurement Cursors

1 vout X: 9.1405k Y: -3.0094

fig. 16

In fig. 15 abbiamo lo schema di un filtro passa basso pilotato da un generatore di segnali sinusoidali il cui picco viene mantenuto costantemente a 1V; per questo filtro:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4.7 \cdot 10^{-3}}{270} \text{ sec} = \frac{4.7 \cdot 10^{-3}}{0.27 \cdot 10^3} = 17.4 \cdot 10^{-6} = 17.4 \mu \text{ sec}$$

$$\omega t = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{17.4 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{17.4} \text{ rad / sec} = 57.5 \text{ krad / sec}$$

$$f_t = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{57.5 \cdot 10^3}{2\pi} = 9.15 \text{ kHz}$$

In fig. 16 è riportato il guadagno del filtro, espresso in dB, al variare della frequenza (in scala logaritmica); il diagramma di Bode cioè. Come possiamo constatare, il guadagno del filtro si mantiene a 0dB sino a circa 3kHz; esso quindi lascia passare inalterati i segnali di bassa frequenza.

Per frequenze superiori a 3 kHz, il guadagno comincia a diminuire e diventa -3dB alla frequenza di circa 9.15kHz, cioè alla frequenza di taglio. Per frequenze maggiori guadagno si riduce ulteriormente e la sua attenuazione diventa, perciò, molto elevata.

Risposta in fase

Anche per la risposta in fase $\varphi(\omega)$ vale quanto già detto per il filtro passa basso RC; essa è data

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega t}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{ft}}$$

perciò :

$$\varphi(f) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega t}\right) = -\arctan\left(\frac{f}{ft}\right)$$

Notiamo ancora una volta che:

- per $f \ll ft$, $\varphi(f) \rightarrow 0$; ciò significa che i segnali di bassa frequenza, oltre a non essere attenuati, non vengono neanche sfasati apprezzabilmente.
- per $f = ft$, $\varphi(f) = -\arctan\left(\frac{f}{ft}\right) = -\arctan(1) = -45^\circ$; cioè, alla frequenza di taglio, la tensione di uscita è in ritardo di 45° rispetto a quella di ingresso.
- per $f \gg ft$, $\varphi(f) \rightarrow -90^\circ$; ciò significa che, alle alte frequenze, il ritardo prodotto dal filtro tende verso i 90° .

In fig. 17 è riportata la risposta in fase del nostro filtro; essa conferma pienamente quanto abbiamo appena detto: lo sfasamento tra uscita e ingresso

- è praticamente nullo alle basse frequenze (in banda passante
- è di 45° in ritardo alla frequenza di 9.15kHz (alla frequenza di taglio)
- tende a -90° alle alte frequenze (in banda attenuata)

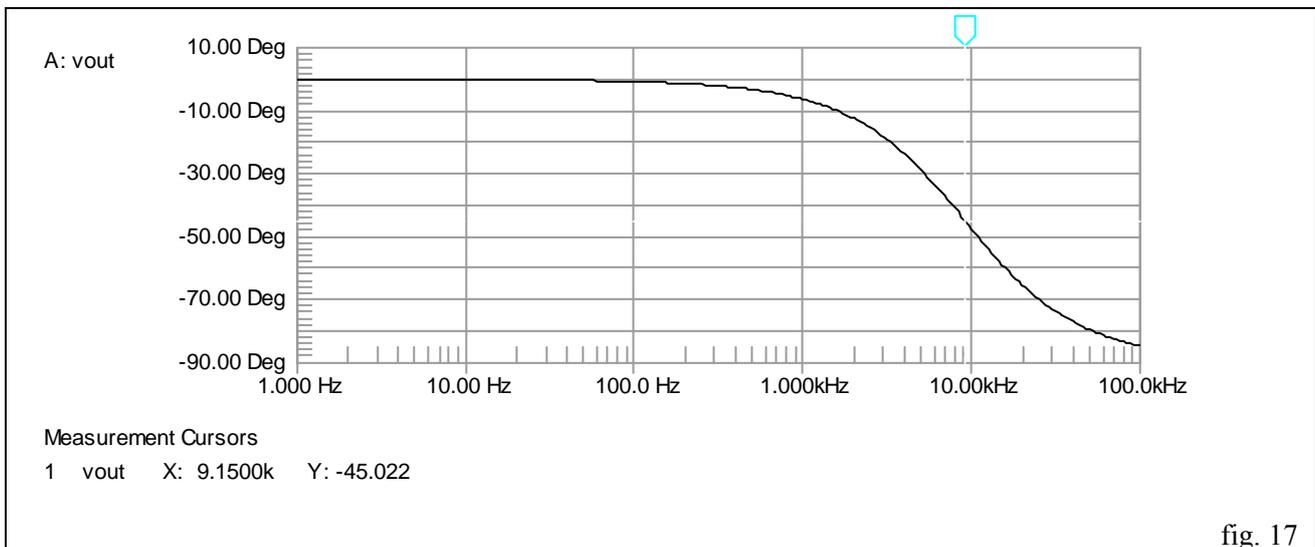


fig. 17

La reattanza capacitiva varia con la frequenza; in particolare alla frequenza di taglio la reattanza della bobina è uguale al valore della resistenza R; infatti:

$$X_L(ft) = 2\pi \cdot ft \cdot L = 2\pi \cdot \frac{R}{2\pi \cdot L} \cdot L = R$$

Se teniamo conto della resistenza della bobina, spesso non trascurabile, il circuito del nostro filtro diventa quello di fig.18, in cui R_s è la resistenza della bobina e RL è il carico:

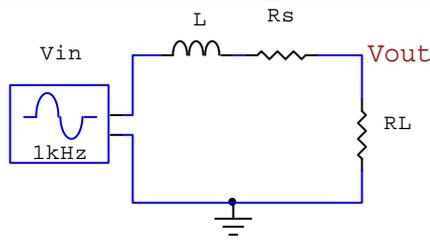


fig. 18

La funzione di trasferimento del filtro ha sempre la forma:

$$F(j\omega) = \frac{A_{v \max}}{1 + j \frac{f}{f_t}}$$

in cui $f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$; nel calcolo della costante di tempo bisogna tener conto che adesso la resistenza vista dalla bobina è $R_{eq} = R_s + R_L$

$A_{v \max}$ è il guadagno del filtro in banda passante, cioè per $f \rightarrow 0$; alle basse frequenze, l'induttanza L si comporta da cortocircuito e il filtro diventa un partitore resistivo; perciò:

$$A_{v \max} = \frac{V_{outp}}{V_{inp}} = \frac{R_L}{R + R_L}$$

Filtro passa alto RC

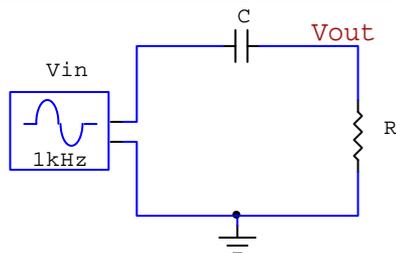


fig. 18

Nel circuito di fig. 18 la tensione di uscita V_{out} è prelevata ai capi della resistenza R. Esso è un filtro passa alto; infatti esso è un partitore di tensione costituito dalla resistenza R e dall'impedenza Z_C del condensatore che, come sappiamo, è molto elevata alle basse frequenze mentre si riduce molto quando la frequenza del segnale è molto elevata. Di conseguenza:

- se la frequenza del segnale di ingresso è molto piccola, allora il condensatore si comporta come una resistenza molto elevata; il segnale di ingresso cade in gran parte su di esso e la tensione di uscita, quella ai capi di R, è, perciò, molto piccola.
- se la frequenza di V_{in} è molto elevata, allora il condensatore si comporta come una resistenza molto piccola e anche la tensione ai suoi capi è molto piccola. La tensione di ingresso si trasferisce quasi tutta in uscita e il circuito si comporta da filtro passa alto.

Funzione di trasferimento

Il nostro circuito è sempre un partitore di tensione; perciò:

$$\overline{V_{out}} = \overline{V_{in}} \frac{R}{R + 1/j\omega C}$$

e quindi:

$$F(j\omega) = \frac{\overline{V_{out}}}{\overline{V_{in}}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega RC}}$$

Anche per il passa alto vengono definite la costante di tempo, la pulsazione critica e la frequenza critica; allo stesso modo che per il passa basso :

$$\tau = RC \text{ (sec)} \quad , \quad \omega_c = 1/RC = 1/\tau \text{ (rad/sec)} \quad , \quad f_c = \omega_c/2\pi = 1/2\pi RC = 1/2\pi\tau \text{ (Hz)}$$

Osserviamo che la costante di tempo, la pulsazione caratteristica e la frequenza caratteristica sono le stesse che per il passa basso perché i due filtri RC hanno lo stesso circuito; l'unica cosa che li differenzia è il componente su cui si preleva la tensione di uscita.

La funzione di trasferimento diventa perciò:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega\tau}{\omega}} = \frac{1}{1 - j \frac{f_c}{f}}$$

Risposta in ampiezza

Al solito, il guadagno A_v è il modulo della risposta in frequenza $F(j\omega)$; perciò:

$$A_v = |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega\tau}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Osserviamo che:

- per $f \ll f_c$, la quantità sotto radice diventa molto elevata e perciò $A_v \rightarrow 0$; ciò significa che, per frequenze molto più piccole di f_c , il picco del segnale di uscita diventa molto piccolo; il filtro, cioè, blocca i segnali la cui frequenza è molto più piccola della frequenza di taglio.
- per $f = f_c$, $A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_{v \max}}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ (-3dB); questo significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza caratteristica del filtro, il guadagno di tensione del filtro è il 70% di quello massimo; la frequenza f_c è quindi la frequenza di taglio del filtro.
- per $f \gg f_c$, $A_v \cong 1 = A_{v \max}$ (0dB); ciò significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più elevata della frequenza di taglio del filtro, il picco del segnale di uscita è circa uguale al picco del segnale di ingresso; cioè il filtro lascia passare i segnali la cui frequenza è molto più elevata di f_c ; e infatti il nostro filtro è di tipo passa alto.

Osservando attentamente il guadagno per $f \ll f_c$, notiamo che:

$$A_v \cong \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{f_c}{f}} = \frac{f}{f_c}$$

dato che 1 è trascurabile rispetto a $\left(\frac{f_c}{f}\right)^2$

In definitiva, a frequenze molto basse, il guadagno del filtro cresce in modo direttamente proporzionale alla frequenza; ciò significa che, quando la frequenza aumenta di un fattore 10, il guadagno di tensione di sminuisce dello stesso fattore; quindi, per $f \ll f_c$, il guadagno cresce di 20dB quando la frequenza aumenta di una decade; ovviamente, quando f diventa molto maggiore di f_c , il guadagno del filtro si stabilizza al valore di $A_{v \max}$.

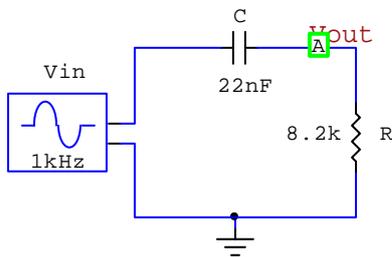
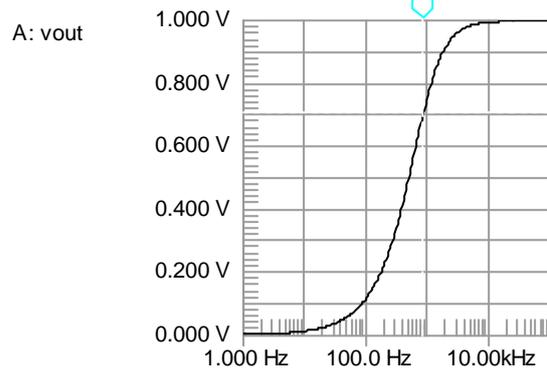


fig. 19



Measurement Cursors
1 vout X: 882.20 Y: 707.05m

fig. 20

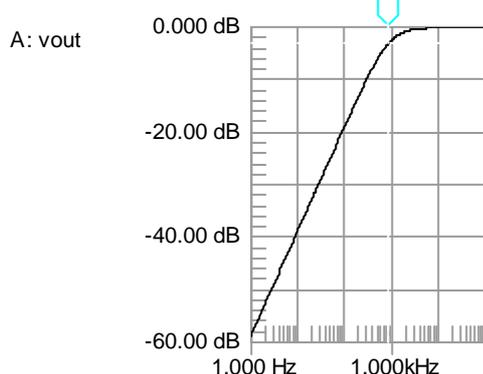
In fig. 19 abbiamo lo schema di un filtro passa alto pilotato da un generatore di segnali sinusoidali il cui picco viene mantenuto costantemente a 1V; per questo filtro:

$$\tau = RC = 8.2 \cdot 10^3 \cdot 22 \cdot 10^{-9} \text{ sec} = 180.4 \cdot 10^{-6} \text{ sec} = 180.4 \mu \text{ sec} \cong 0.18 \text{ m sec}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.18 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{0.18} \text{ rad / sec} = 5.54 \text{ krad / sec}$$

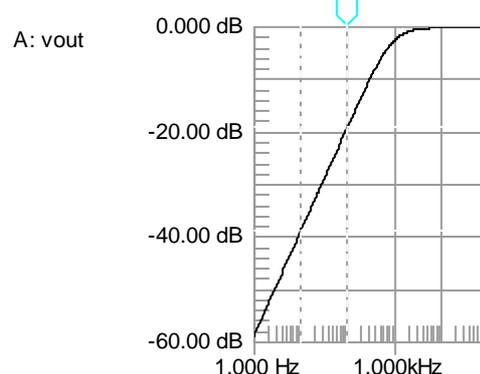
$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{5.54 \cdot 10^3}{2\pi} = 882.2 \text{ Hz}$$

In fig. 20 è riportato l'andamento del picco di Vout al variare della frequenza (in scala logaritmica); come possiamo notare, il picco di Vout si mantiene a 1V (uguale a quello di Vin) per frequenze elevate (da qualche kHz in poi) ; per valori più piccoli di frequenza, il picco di Vout comincia a diminuire e diventa 707 mV alla frequenza di 882.2 Hz, cioè alla frequenza di taglio. Per frequenze più piccole di 882.2Hz il picco di Vout si riduce ulteriormente sino a diventare inapprezzabile.



Measurement Cursors
1 vout X: 882.01 Y: -3.0123

fig.21



Measurement Cursors
1 vout X: 10.000 Y: -38.912
2 vout X: 100.00 Y: -18.967
Cursor 2 - Cursor 1 X: 90.000 Y: 19.945

fig.22

La fig. 21 riporta il diagramma di Bode del guadagno del filtro; come ci aspettavamo, dal diagramma si rileva che:

- a frequenze elevate il guadagno è 0dB e quindi il filtro non attenua; esso lascia passare i segnali di

frequenza più elevata della frequenza di taglio.

- alla frequenza di taglio (882.2Hz), il guadagno del filtro è -3dB, cioè 3dB in meno rispetto al valore che ha in banda passante.
- a frequenze più piccole della frequenza di taglio, il filtro attenua notevolmente.

La fig. 22 invece mostra che, in banda attenuata, quando la frequenza del segnale varia di una decade, da 10Hz a 100Hz nel nostro caso, il guadagno varia di quasi 20dB.

Risposta in fase

La risposta in fase $\varphi(\omega)$ è data dall'argomento della risposta in frequenza $F(j\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega t}{\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{f_t}{f}}$;

perciò :

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\omega t}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{f_t}{f}\right)$$

Notiamo che:

- per $f \ll f_t$, $\varphi(f) \rightarrow 90^\circ$; ciò significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più piccola della frequenza di taglio del filtro, la tensione di uscita tende ad anticipare di 90° rispetto a quella di ingresso.
- per $f = f_t$, $\varphi(f) = \arctan\left(\frac{f_t}{f}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$; questo significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza di taglio del filtro, la tensione di uscita è in anticipo di 45° rispetto a quella di ingresso.
- per $f \gg f_t$, $\varphi(f) \rightarrow 0$; ciò significa che, quando la frequenza del segnale di ingresso è molto più elevata della frequenza di taglio del filtro, cioè in banda passante, la tensione di uscita è praticamente in fase con quella di ingresso.

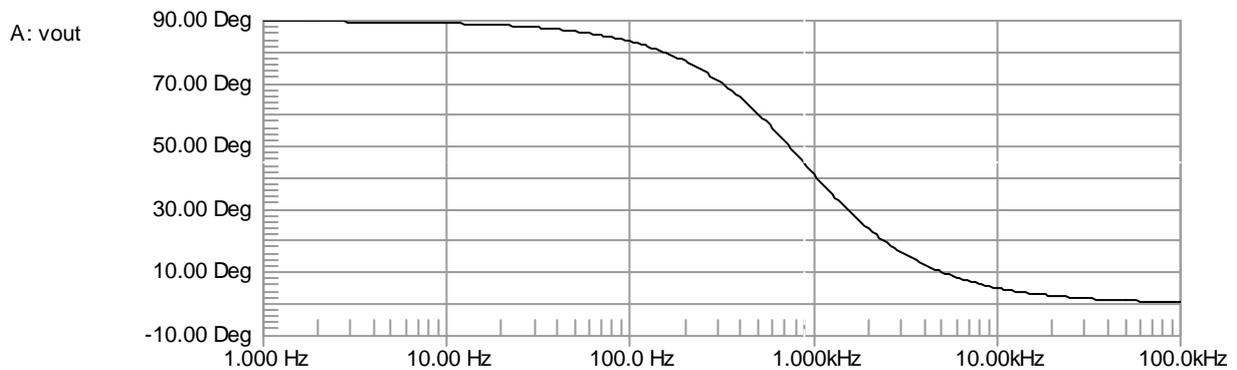


fig. 23

La fig. 23 mostra la risposta in fase del filtro passa alto: in banda passante, cioè alle alte frequenze, lo sfasamento tra uscita ed ingresso è trascurabile, mentre è di 45° in anticipo alla frequenza di taglio (882Hz). In banda attenuata, cioè alle basse frequenze, lo sfasamento tra uscita e ingresso tende verso i 90° in anticipo.

Filtro passa alto RL

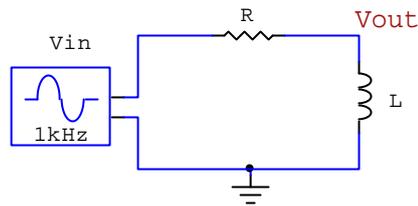


fig. 24

Anche il filtro passa alto RL (fig. 24) ha una struttura duale rispetto a quella del corrispondente filtro passa alto RC; infatti, anche stavolta la resistenza e la reattanza hanno posizioni scambiate rispetto a quelle che occupano nel passa alto RC. Ciò è dovuto sempre al fatto che la bobina e il condensatore hanno un comportamento duale.

Anche questo filtro è un partitore costituito dalla impedenza induttiva $Z_L = j\omega L$ e dalla resistenza R; perciò:

- visto che alle basse frequenze la reattanza induttiva $X_L = \omega L = 2\pi \cdot fL$ è trascurabile, la tensione che cade su di essa, cioè la tensione di uscita, è piccola e quindi i segnali sinusoidali di bassa frequenza vengono attenuati dal filtro
- viceversa alle alte frequenze la reattanza induttiva è molto elevata e perciò i segnali di alta frequenza si trasferiscono quasi per intero sulla bobina, cioè in uscita; la tensione di uscita è, quindi, pressochè uguale a quella di ingresso e il circuito si comporta da filtro passa alto.

Funzione di trasferimento

Come nel filtro passa alto RC, la funzione di trasferimento è:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega\tau}{\omega}} = \frac{1}{1 - j \frac{f_t}{f}}$$

Al solito, $f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$ e $\tau = \frac{L}{R}$ è la costante di tempo della bobina; il suo inverso è, ovviamente, la pulsazione caratteristica $\omega_c = 2\pi \cdot f_t$.

La costante di tempo, la pulsazione caratteristica e la frequenza caratteristica, come sempre, dipendono solo dai componenti del circuito e restano costanti sino a quando non cambiamo il valore di R e L.

Risposta in ampiezza

Ricavando il guadagno di tensione, otteniamo

$$A_v = |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega\tau}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_t}{f}\right)^2}}$$

Come nel passa alto RC, osserviamo che:

- per $f \ll f_t$, la quantità sotto radice diventa molto elevata e perciò $A_v \rightarrow 0$; ciò significa che il filtro blocca i segnali la cui frequenza è molto più piccola della frequenza di taglio.
- per $f = f_t$, $A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_{v \max}}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ (-3dB); cioè quando la frequenza del segnale di ingresso è uguale alla frequenza caratteristica del filtro, il guadagno del filtro è il 70% di quello di massimo; la frequenza f_t è quindi la frequenza di taglio del filtro.
- per $f \gg f_t$, $A_v \cong 1$ (0dB); ciò significa che il filtro lascia passare i segnali la cui frequenza è molto più elevata di f_t ; e infatti il nostro filtro è di tipo passa alto.

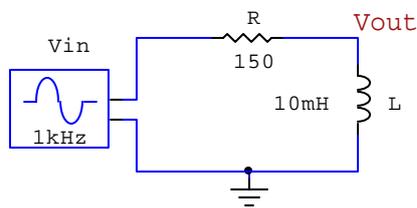
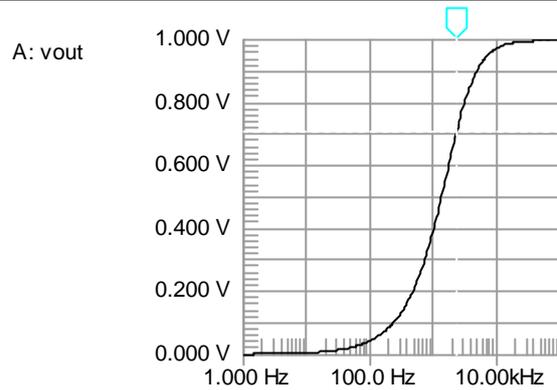


fig. 25



Measurement Cursors

1 vout X: 2.3869k Y: 707.02m

fig. 26

In fig. 25 abbiamo lo schema di un filtro passa alto RL pilotato da un generatore di segnali sinusoidali il cui picco viene mantenuto costantemente a 1V; per questo filtro:

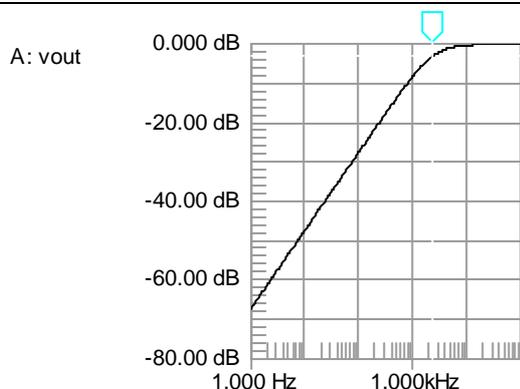
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{150} \text{ sec} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0.15 \cdot 10^3} = 66.7 \cdot 10^{-6} \text{ sec} = 66.7 \mu\text{sec}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{66.7 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{66.7} \text{ rad/sec} = 15 \text{ krad/sec}$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{15 \cdot 10^3}{2\pi} = 2.39 \text{ kHz}$$

In fig. 26 troviamo l'andamento del picco di Vout al variare della frequenza anche stavolta, il picco di Vout si mantiene a 1V (uguale a quello di Vin) per frequenze elevate (da 10 kHz in poi, grossomodo) ; per valori più piccoli di frequenza, il picco di Vout comincia a diminuire e diventa 707 mV alla frequenza di 2.386 Hz, cioè alla frequenza di taglio. Per frequenze più piccole di 2.386Hz il picco di Vout si riduce ulteriormente sino a diventare inapprezzabile. Se osserviamo il diagramma di Bode del guadagno notiamo che:

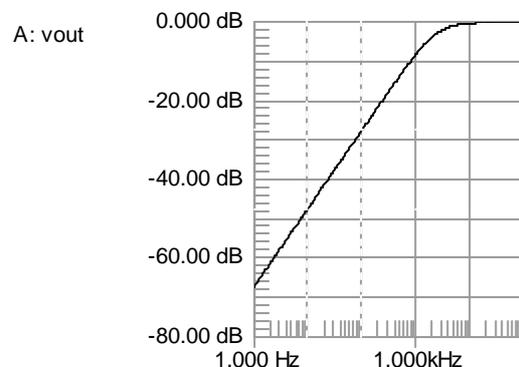
- in banda passante (alte frequenze) il guadagno del filtro è 0dB (fig. 27)
- alla frequenza di taglio il guadagno del filtro è -3dB (fig. 28)
- in banda attenuata, il guadagno del filtro varia di circa 20dB quando f varia di una decade (fig. 28)



Measurement Cursors

1 vout X: 2.3869k Y: -3.0115

fig. 27



Measurement Cursors

1 vout X: 10.000 Y: -47.558
2 vout X: 100.04 Y: -27.562
Cursor 2 - Cursor 1 X: 90.040 Y: 19.996

fig. 28

Risposta in fase

Come sempre $\varphi(f)$ è data dall'argomento della risposta in frequenza $F(j\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega t}{\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{f t}{f}}$;

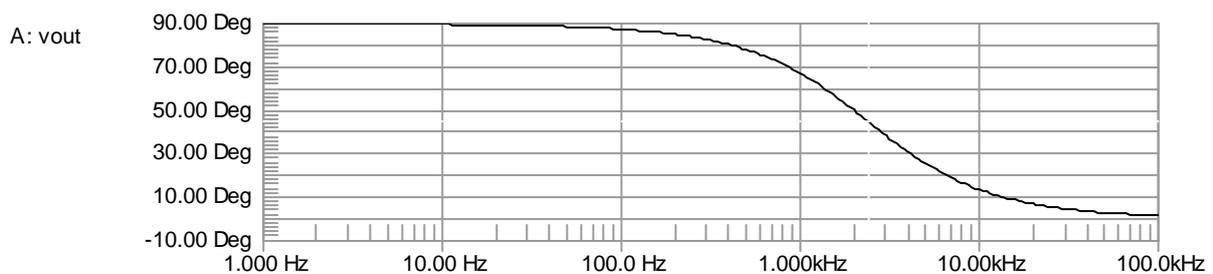
perciò :

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\omega t}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{f t}{f}\right)$$

Come nel passa alto RC:

- per $f \ll f_t$, $\varphi(f) \rightarrow 90^\circ$; ciò significa che, in banda attenuata, la tensione di uscita tende ad anticipare di 90° rispetto a quella di ingresso .
- per $f = f_t$, $\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\omega t}{\omega}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$; ancora una volta, alla frequenza di taglio la tensione di uscita è in anticipo di 45° rispetto a quella di ingresso.
- per $f \gg f_t$, $\varphi(f) \rightarrow 0$; ciò significa che, in banda passante, la tensione di uscita è praticamente in fase con quella di ingresso.

La curva di fase del nostro filtro, riportata in fig. 29 conferma quanto abbiamo appena osservato.

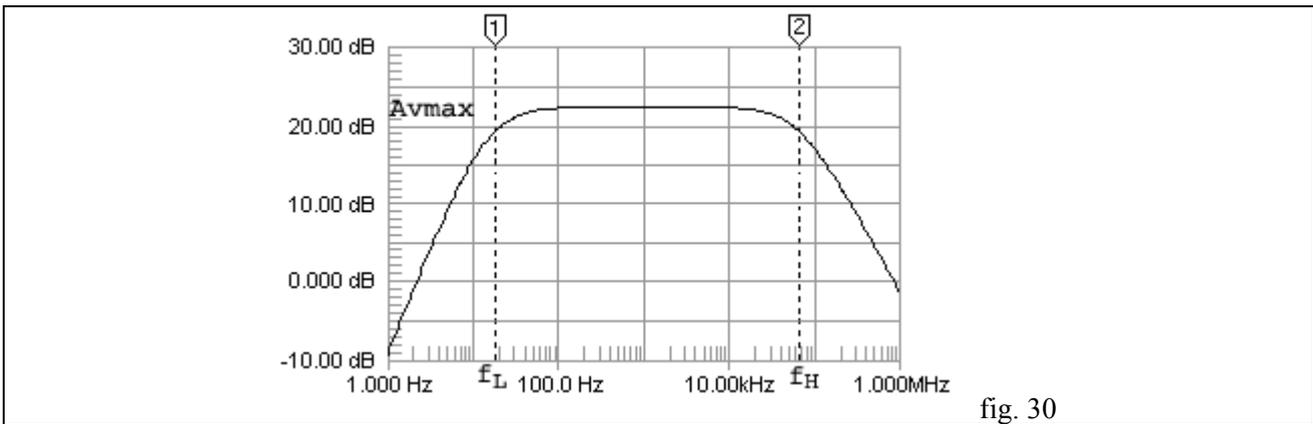


Measurement Cursors
1 vout X: 2.3866k Y: 45.009

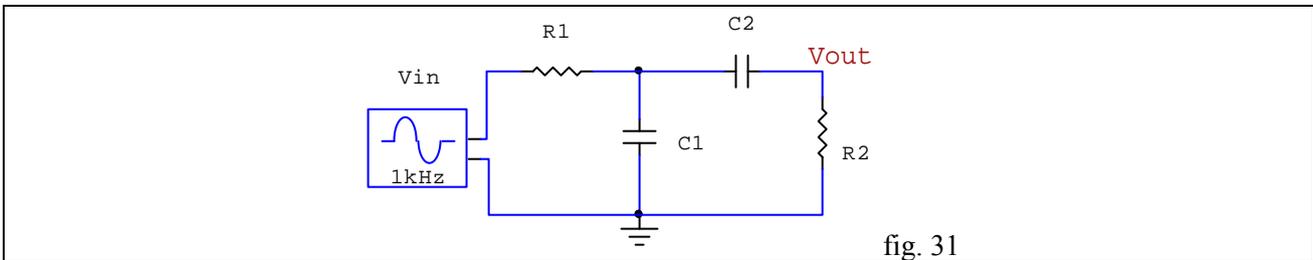
fig. 29

Anche nel filtro passa alto RL, alla frequenza di taglio, la reattanza induttiva è uguale al valore della resistenza R, come si può facilmente verificare.

Filtri passa banda

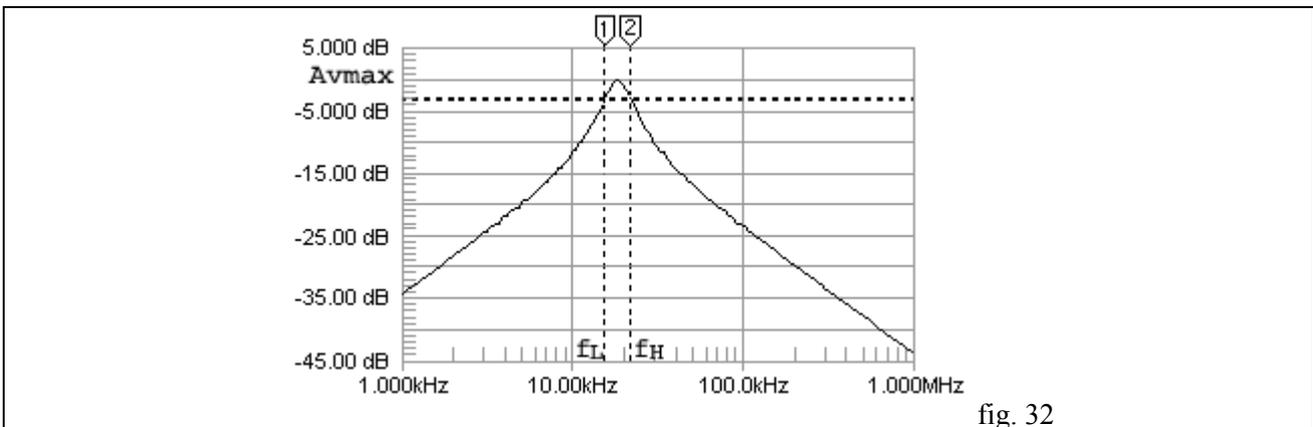


Per realizzare un filtro passa banda, si può pensare di mettere in cascata un filtro passa alto di frequenza di taglio f_L , che blocca le frequenze minori di f_L , ed un passa basso di frequenza di taglio f_H , che taglia le frequenze maggiori di f_H , come in fig. 31; l'ordine con cui sono inseriti i due filtri non è importante.



Questa maniera di realizzare il passa banda è, però, effettivamente praticabile quando la banda passante del filtro è molto larga, come in fig. 30; in questo caso, infatti, i due filtri tagliano in zone molto diverse di frequenza per cui essi non interferiscono. Ovviamente, al posto di due filtri RC, potremmo usare due filtri RL.

Quando, invece, la banda passante del filtro è molto stretta, come in fig. 32, i due filtri vengono a tagliare in zone molto vicine se non nella stessa zona; i loro effetti si sovrappongono e, come risultato, l'attenuazione del filtro può essere rilevante, anche in banda passante. Per questo motivo, per realizzare i filtri passa banda, a banda stretta, si preferisce ricorrere ai circuiti risonanti.



Circuiti Risonanti

Sono costituiti, nel caso più semplice, da una bobina e un condensatore connessi in serie (fig. 33) o in parallelo (fig. 34)

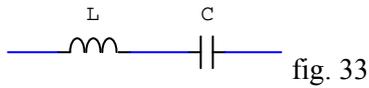


fig. 33

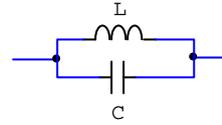


fig.34

Nel **circuito risonante serie** (fig. 33), l'impedenza complessiva è la somma delle due impedenze; cioè:

$$Z_s = Z_L + Z_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Avendo segno opposto, le reattanze induttiva e capacitiva tendono a sottrarsi; ad una particolare frequenza, detta frequenza di risonanza, la reattanza totale, e quindi l'impedenza, si annulla. Per determinare la frequenza di risonanza f_0 , basta imporre che, ad una particolare frequenza, l'impedenza complessiva Z_s si annulli; ciò comporta che:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Da questa ricaviamo $\omega^2 LC = 1$ e quindi $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; per cui, in definitiva, la frequenza di risonanza è:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

È importante osservare che, alla risonanza serie, le tensioni sulla bobina e sul condensatore sono uguali ed opposte; L e C sono, infatti, attraversate dalla stessa corrente ma le loro reattanze sono opposte. La tensione complessiva sulla serie è, ovviamente, nulla e, infatti, alla risonanza, la serie LC si comporta da cortocircuito.

Nel **circuito risonante parallelo** (fig.34), l'ammettenza complessiva è la somma delle due ammettenze, che hanno segno opposto; cioè:

$$Y_p = Y_L + Y_C = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = -\frac{j}{\omega L} + j\omega C = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Alla frequenza di risonanza, l'ammettenza complessiva si annulla; ciò accade quando:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

cioè quando $\omega^2 LC = 1$; la frequenza di risonanza parallelo è, anche in questo caso:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Osserviamo che, alla risonanza parallelo, le correnti nella bobina e nel condensatore sono uguali ed opposte; L e C sono, infatti, hanno la stessa tensione ai capi ma hanno reattanze opposte. In queste condizioni, la corrente assorbita complessivamente dal parallelo è, ovviamente, nulla e, infatti, alla risonanza, il parallelo LC si comporta da circuito aperto (impedenza infinita e, perciò, ammettenza nulla)

In definitiva:

- alla risonanza serie l'impedenza del blocco LC è minima (idealmente nulla)
- alla risonanza parallelo, l'impedenza del blocco LC è massima (idealmente infinita)

Filtro passa banda risonante serie

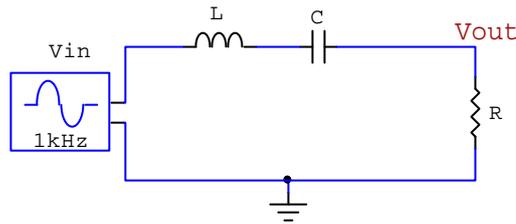


fig. 35

In questo filtro la bobina e il condensatore sono posti in serie al carico R; di conseguenza:

- i segnali di bassa frequenza sono bloccati dal condensatore, che alle basse frequenze ha reattanza molto elevata;
- quelli di alta frequenza sono bloccati dalla bobina, che alle alte frequenze ha reattanza molto grande.
- Alla frequenza di risonanza la serie LC è, globalmente, un cortocircuito per cui $V_{out}=V_{in}$ e il guadagno di tensione raggiunge il suo massimo valore $A_{vmax}=1$

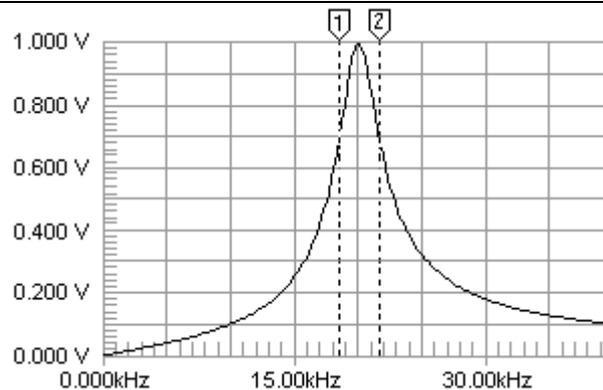


fig. 36

La fig. 36 riporta il picco della tensione di uscita del filtro di figura 35; come possiamo vedere, la banda passante del filtro è molto stretta.

Si può dimostrare che, nei filtri passa banda risonanti, la larghezza di banda BW è data da:

$$BW = f_H - f_L = \frac{f_0}{Q}$$

Q, detto coefficiente di risonanza, nei circuiti LC serie è il rapporto tra la reattanza induttiva (o capacitiva, calcolata alla risonanza), e la resistenza; cioè:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_{eq}} = \frac{1/\omega_0 C}{R_{eq}} = \frac{1}{\omega_0 C R_{eq}}$$

in cui Req è la resistenza vista ai capi della serie RC; nel nostro caso Req=R

Q è adimensionale ed esprime il rapporto tra la tendenza del circuito ad immagazzinare energia nelle sue reattanze e la tendenza a dissipare energia nella sua parte resistiva.

In generale f_H è più distante da f_0 di quanto non lo sia f_L , perché la risposta in ampiezza non è simmetrica attorno alla frequenza di risonanza; anzi si può dimostrare che:

$$f_0 = \sqrt{f_H \cdot f_L}$$

per cui f_0 è la media geometrica delle due frequenze di taglio. Però per $Q \geq 5$, le due frequenze di taglio si possono supporre equidistanti dalla frequenza di risonanza per cui:

$$f_L \cong f_0 - \frac{1}{2} BW; \quad f_H \cong f_0 + \frac{1}{2} BW$$

Nel filtro di fig.35 abbiamo $R=80\Omega$, $L=4.2\text{mH}$ e $C=15\text{pF}$; il picco di V_{in} è 1V ; la frequenza di risonanza vale:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4.2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4.2 \cdot 15 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-3} \sqrt{4.2 \cdot 15}} = \frac{10^3}{2\pi \cdot \sqrt{4.2 \cdot 15}} \cong 20\text{kHz}$$

Mentre:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{R} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3}}{80} = 6.6$$

per cui la larghezza di banda del filtro è:

$$BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{20 \cdot 10^3}{6.6} = 3\text{kHz}$$

Come possiamo vedere dalla fig. 36, il picco di V_{out} ha un massimo alla frequenza di 20kHz (la frequenza di risonanza); a questa frequenza, il picco di V_{out} è 1V , come quello di V_{in} , per cui $A_{v\max}=1$; alle due frequenze di taglio, rispettivamente 18.6kHz e 21.6kHz , il picco di V_{out} è circa 0.7V ; la larghezza di banda è, quindi, 3kHz come previsto.

Filtro passa banda risonante parallelo

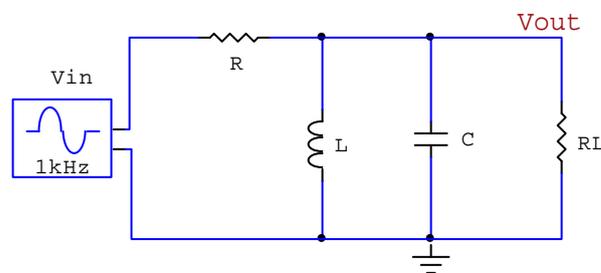


fig. 37

Nel filtro risonante parallelo, il blocco LC parallelo è posto, a sua volta, in parallelo al carico; perciò:

- i segnali di bassa frequenza sono cortocircuitati dalla bobina
- quelli di alta frequenza sono cortocircuitati dal condensatore
- alla risonanza il blocco LC è un tasto aperto per cui V_{outp} raggiunge il suo massimo valore; anche

$$\text{il guadagno di tensione raggiunge il suo massimo valore } A_{v\max} = \frac{V_{outp}}{V_{inp}} = \frac{R_L}{R + R_L}$$

Anche per questo filtro, la larghezza di banda è:

$$BW = f_H - f_L = \frac{f_0}{Q}$$

Il coefficiente di risonanza Q è, però, dato da :

$$Q = \frac{R_{eq}}{\omega_0 \cdot L} = \frac{R_{eq}}{1/\omega_0 \cdot C} = \omega_0 \cdot C \cdot R_{eq}$$

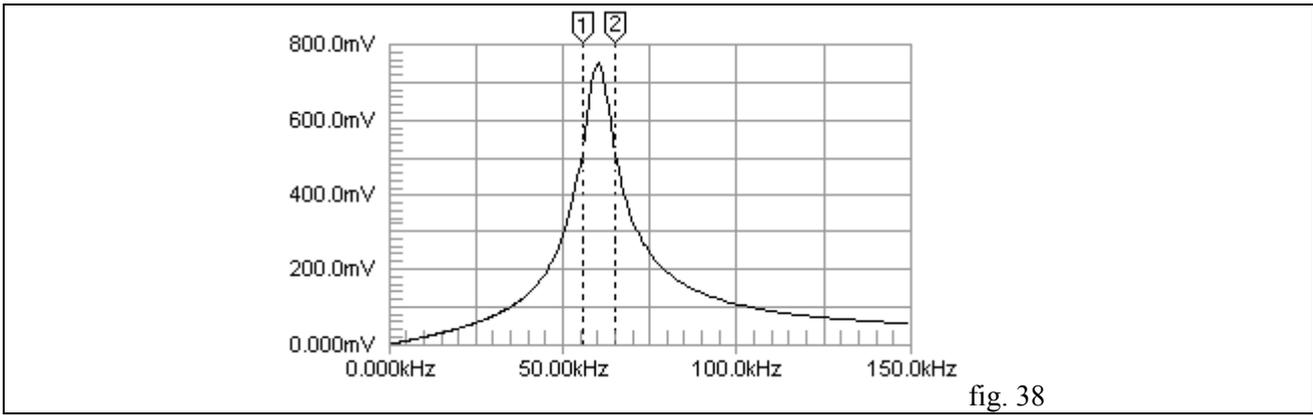
R_{eq} è la resistenza vista ai capi del parallelo LC; nel nostro caso $R_{eq} = R \parallel R_L$

Anche in questo caso le due frequenze di taglio non sono simmetriche rispetto a f_0 ; però, per $Q \geq 5$, le due frequenze di taglio si possono supporre equidistanti dalla frequenza di risonanza per cui:

$$f_L \cong f_0 - \frac{1}{2} BW; \quad f_H \cong f_0 + \frac{1}{2} BW$$

In fig. 38 è riportato il picco della tensione di uscita al variare della frequenza nel filtro di fig. 37 in cui $R=3.3\text{k}\Omega$, $R_L=10\text{k}\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=7\text{nF}$; il picco di V_{in} è 1V .

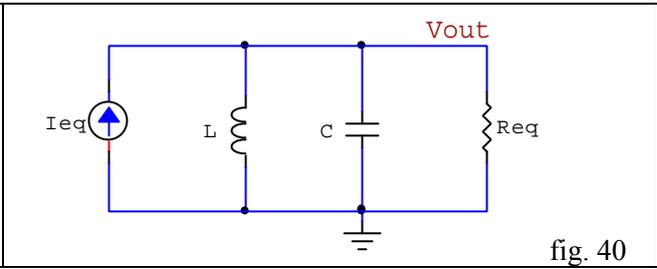
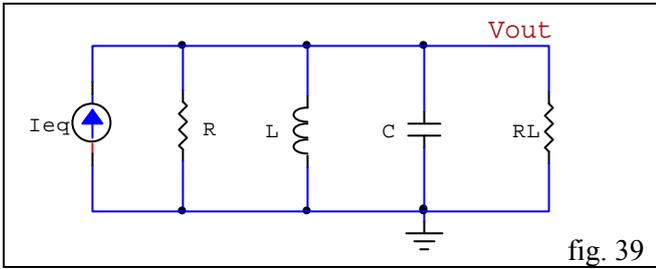
Come possiamo notare, V_{outp} raggiunge un massimo di 750mV alla frequenza di 60kHz ; la larghezza di banda è circa 10kHz ; l'alunno può facilmente verificare che questi risultati sono d'accordo con le previsioni



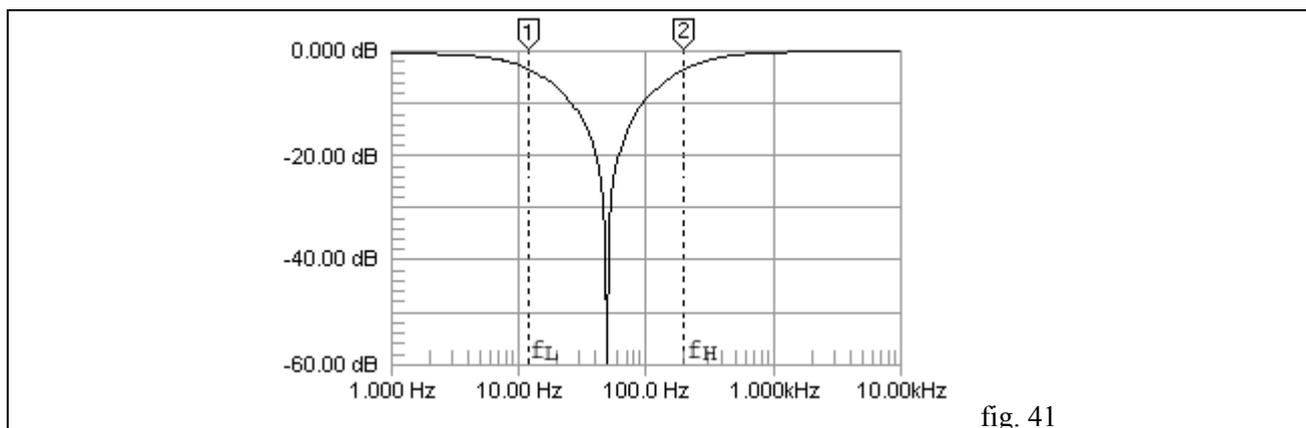
A volte, per facilitare l'analisi circuitale, il bipolo costituito dal generatore V_{in} e dalla resistenza R (fig. 37) viene sostituito, mediante il teorema di Norton, da un generatore di corrente equivalente, come in fig. 39; I_{eq} è la corrente che scorre tra i morsetti del bipolo posti in cortocircuito ed è:

$$I_{eq} = \frac{V_{in}}{R}$$

Il circuito di fig. 39 equivale a quello di fig.40 in cui $R_{eq} = R \parallel R_L$



Filtri taglia banda (Notch)

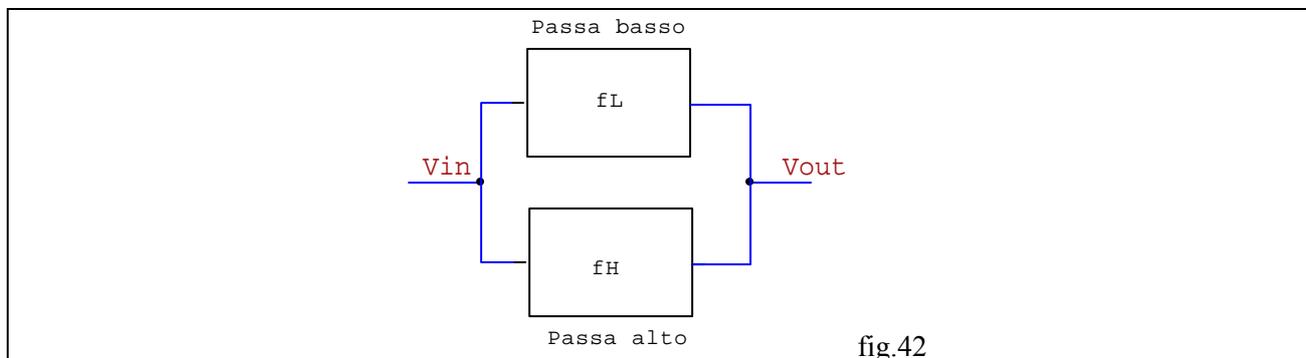


Il filtro taglia banda lascia passare tutte le frequenze, bloccando solo quelle comprese in un certo intervallo; esso è usato per bloccare un rumore fastidioso ad una determinata frequenza, ad esempio quella di rete. La figura 41 riporta la risposta in ampiezza di un filtro notch che blocca solo le frequenze centrate attorno a 50Hz; tutte le altre frequenze sono lasciate passare.

La risposta in ampiezza suggerisce che il filtro potrebbe essere realizzato mettendo in parallelo due filtri, uno passa basso con frequenza di taglio f_L , l'altro passa alto con frequenza di taglio f_H , come in fig. 42.

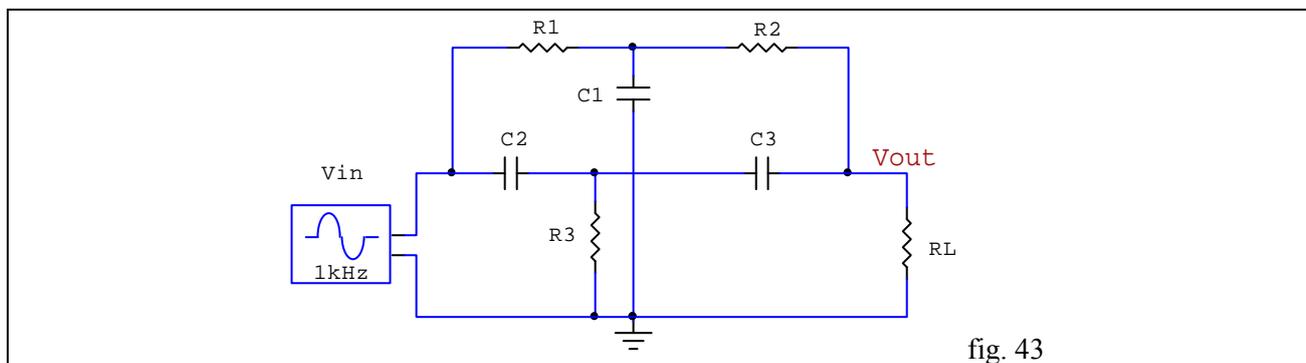
In questo modo:

- i segnali di frequenza minore di f_L passano attraverso il passa basso, mentre sono bloccati dal passa alto
- i segnali di frequenza maggiore di f_H passano attraverso il passa alto e sono bloccati dal passa basso
- i segnali di frequenza compresa tra f_L e f_H vengono bloccati da entrambi i filtri



Filtro Notch a doppio T (Twin T)

Una interessante realizzazione del filtro notch è quella di fig. 43, in cui un filtro passa basso, costituito dalla T individuata da R_1 , R_2 e C_1 , è posto in parallelo al passa alto individuato dalla T, costituita da C_2 , C_3 e R_3



Questo filtro viene progettato, imponendo:

$$R_1 = R_2 = 2R_3 \quad ; \quad C_2 = C_3 = 0.5C_1$$

In queste condizioni, la frequenza bloccata è:

$$f_{notch} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R_3 \cdot C_3}$$

La larghezza della banda tagliata BW_{notch} è sempre:

$$BW_{notch} = \frac{f_{notch}}{Q}$$

In questo filtro, $Q=0.25$; ciò comporta che la banda tagliata ha una larghezza pari a $4f_{notch}$; il filtro non è, quindi, molto selettivo e, inoltre richiede componenti di buona precisione perché sia i valori di resistenza che quelli di capacità devono stare in un rapporto ben preciso.

NB Nelle formule di progetto, si è fatta l'ipotesi che il carico R_L assorba una corrente trascurabile e, in definitiva, che R_L sia molto più grande di tutte le altre resistenze contenute nel filtro.

Filtro notch risonante serie

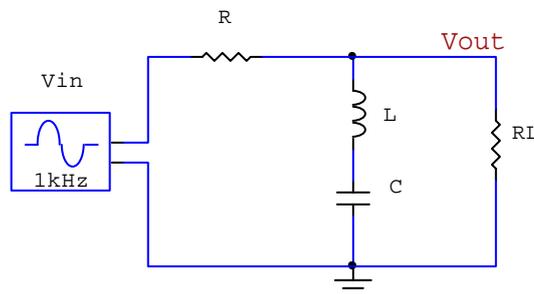


fig. 44

In fig. 44 abbiamo un filtro notch che utilizza un circuito risonante serie; come possiamo osservare:

- alle basse frequenze, il blocco LC è un tasto aperto perché C è un tasto aperto
- alle alte frequenze, il blocco LC è un tasto aperto perché L è un tasto aperto
- alla frequenza di risonanza f_0 , il blocco LC è un cortocircuito e, perciò, $V_{out}=0$

In definitiva, alle alte e alle basse frequenze, il blocco LC non disturba la trasmissione del segnale; il guadagno di tensione è massimo; anzi:

$$Av_{max} = \frac{R_L}{R + R_L}$$

La frequenza bloccata è:

$$f_{notch} = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

e la larghezza della banda tagliata è:

$$BW_{notch} = \frac{f_{notch}}{Q}$$

dove :

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot L}{R_{eq}}$$

in cui R_{eq} è la resistenza vista dal blocco RC (in questo caso $R_{eq}=R||R_L$)

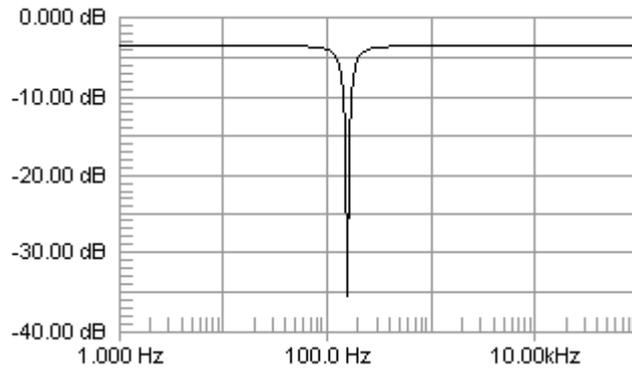


fig. 45

In fig. 45, abbiamo la risposta in ampiezza del filtro notch di fig. 44, realizzato con $R=50\Omega$, $R_L=100\Omega$, $L=100\text{mH}$ e $C=10\mu\text{F}$.
La frequenza tagliata è circa 159Hz; il guadagno massimo è -3.52dB; la larghezza della banda tagliata è 53Hz come lo studente può verificare.

Filtro notch risonante parallelo

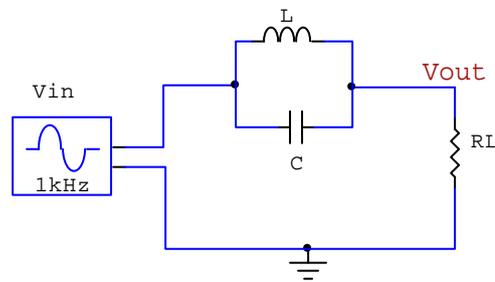


fig.46

In fig. 46 abbiamo un filtro notch che utilizza un circuito risonante parallelo; come possiamo osservare:

- alle basse frequenze, il blocco LC è un cortocircuito perché L è un cortocircuito; perciò $V_{out} \cong V_{in}$
- alle alte frequenze, il blocco LC è un cortocircuito perché C è un cortocircuito; perciò $V_{out} \cong V_{in}$
- alla frequenza di risonanza f_0 , il blocco LC è un tasto aperto e, perciò, $V_{out}=0$

In definitiva, alle alte e alle basse frequenze, il blocco LC non disturba la trasmissione del segnale ; il guadagno di tensione è massimo; anzi $A_{vmax}=1$.

Anche in questo caso, la frequenza bloccata è:

$$f_{notch} = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

e la larghezza della banda tagliata è:

$$BW_{notch} = \frac{f_{notch}}{Q}$$

dove :

$$Q = \frac{R_{eq}}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot L}$$

in cui R_{eq} è la resistenza vista dal blocco RC (in questo caso $R_{eq}=R$)

In fig. 47, abbiamo la risposta in ampiezza del filtro notch di fig. 46, realizzato con $R_L=1\text{k}\Omega$, $L=100\text{mH}$ e $C=1\mu\text{F}$

La frequenza tagliata è circa 501Hz; il guadagno massimo è 0dB; la larghezza della banda tagliata è 162Hz come lo studente può verificare.

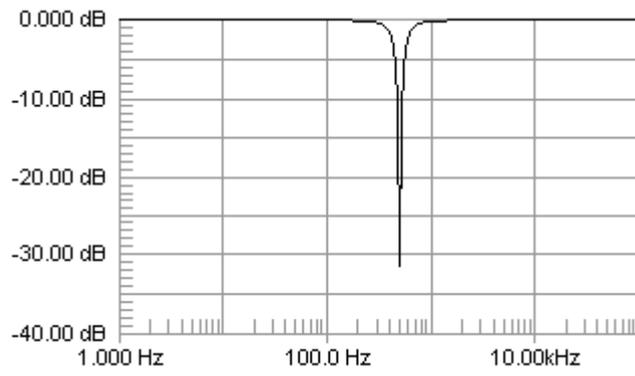
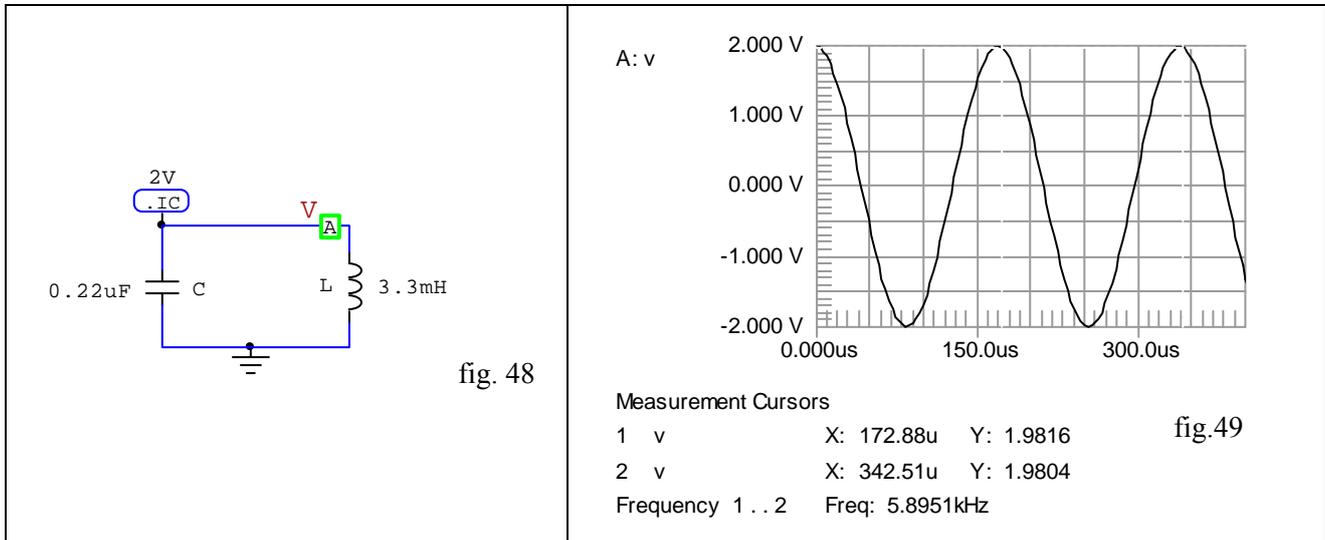


fig. 47

Risonanza LC

Oscillazioni libere persistenti



Se carichiamo un condensatore, determinando ai suoi capi una tensione, ad esempio di 2V, e poi lo chiudiamo su una bobina, come in fig. 48, si manifesta un fenomeno interessante: il condensatore comincia a scaricarsi sulla bobina, cedendo via via ad essa l'energia che esso aveva immagazzinato (quella che noi gli avevamo fornito quando lo avevamo caricato).

Quando la bobina ha acquisito tutta l'energia che aveva il condensatore, il fenomeno si inverte: la bobina comincia a scaricarsi sul condensatore, restituendo ad esso la sua energia.

In definitiva, a regime il condensatore e la bobina si scambiano l'energia che noi abbiamo inizialmente fornito. Questo fenomeno viene chiamato risonanza ed è periodico; in pratica, per mezzo periodo il condensatore si scarica cedendo energia alla bobina, caricandola; nell'altro mezzo periodo è la bobina a cedere energia al condensatore ricaricandolo.

La frequenza con cui il fenomeno si ripete è chiamata frequenza di risonanza f_0 ; essa è determinata dai componenti del circuito, cioè da L e C:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

La tensione e la corrente nel circuito variano sinusoidalmente alla frequenza di risonanza.

E' importante osservare che, alla frequenza di risonanza e a regime sinusoidale, la reattanza induttiva e quella capacitiva hanno lo stesso valore, come abbiamo già visto.

Nel circuito di fig. 48:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{3.3 \cdot 10^{-3} \cdot 0.22 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{3.3 \cdot 10^{-3} \cdot 2.2 \cdot 10^{-7}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{7.26 \cdot 10^{-10}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-5} \sqrt{7.26}} = \frac{10^5}{2\pi \cdot \sqrt{7.26}} = \frac{100 \cdot 10^3}{2\pi \cdot \sqrt{7.26}} = 5.9 \text{kHz} \end{aligned}$$

La simulazione di fig. 49 conferma le nostre previsioni:

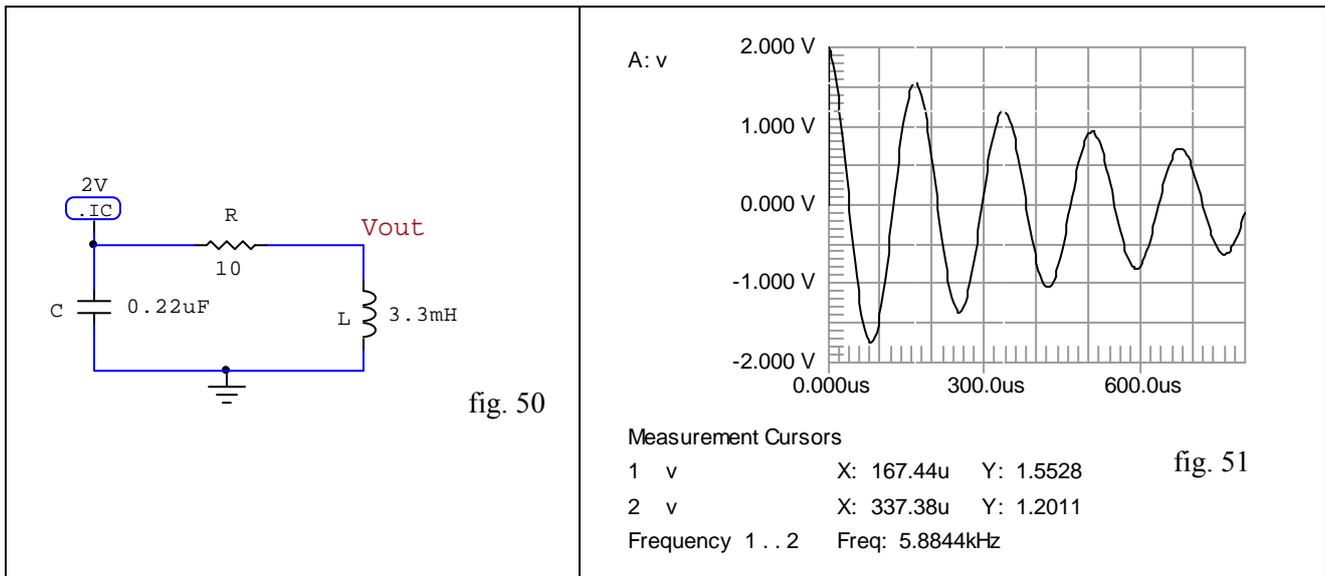
- la tensione ai capi di C e L oscilla sinusoidalmente con un picco di 2V (la tensione iniziale sul condensatore)
- la frequenza di oscillazione ha il valore previsto (Frequency 1.....2 5.895kHz)

Nel circuito di fig. 48 il condensatore e la bobina continuano a scambiarsi l'energia per un tempo indefinito; nel circuito infatti non c'è alcun elemento che dissipi l'energia che noi abbiamo fornito inizialmente; il circuito può, perciò, risonare all'infinito.

E' ovvio, però, che il circuito di fig. 48 è una idealizzazione: in realtà nel circuito sarà inevitabilmente presente una resistenza, sia pure piccola, che dissipa una energia; in conseguenza di ciò le oscillazioni si smorzano più o meno rapidamente, a secondo del valore della resistenza.

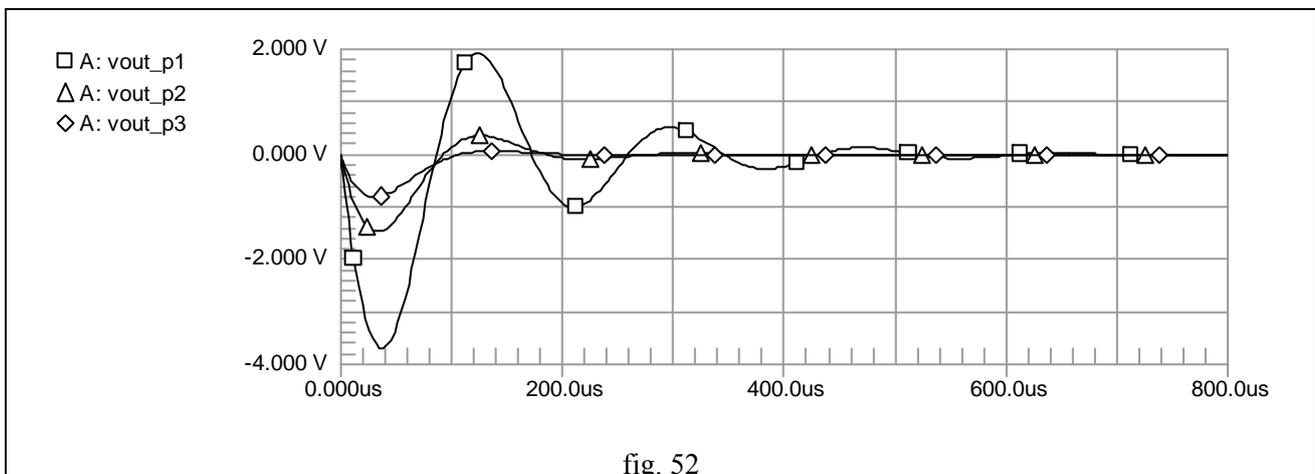
Le oscillazioni si smorzano quando la resistenza avrà dissipato tutta l'energia posseduta inizialmente dal circuito.

Oscillazioni libere smorzate: circuito RLC serie



Il circuito di fig. 50 è il circuito risonante che abbiamo appena studiato in cui è stata inserita una resistenza $R=10\Omega$ in serie al blocco LC; come mostra la fig. 51, l'energia che bobina e condensatore si scambiano ad ogni periodo va diminuendo per via della potenza dissipata dalla resistenza e le oscillazioni si vanno smorzando.

Se aumentiamo il valore di R, le oscillazioni si smorzano sempre più rapidamente. La fig. 52 mostra la tensione ai capi della bobina di fig. 32 per tre diversi valori di R : $R_1=50\Omega$, $R_2=100\Omega$, $R_3=150\Omega$. Come possiamo notare, all'aumentare di R le oscillazioni si vanno smorzando sempre più rapidamente, anzi per $R=150\Omega$ si smorzano praticamente già al primo ciclo.



Il parametro che descrive l'attitudine del circuito RLC ad oscillare liberamente è il coefficiente di risonanza Q; esso, come già sappiamo, è il rapporto tra la tendenza del circuito ad immagazzinare energia nei suoi elementi reattivi e la tendenza che ha il circuito a dissipare energia nella resistenza.

In pratica Q è il rapporto tra la reattanza induttiva (o capacitiva) e la resistenza; esso viene calcolato alla

frequenza di risonanza:

$$Q_L = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{\frac{2\pi \cdot f_0 \cdot C}{R}} = Q_C = \frac{1}{2\pi \cdot f_0 \cdot R \cdot C} = Q$$

Più elevato è Q e minore è l'energia dissipata dalla resistenza ad ogni ciclo e maggiore è il numero di periodi in cui il circuito rimane in oscillazione prima che il fenomeno si smorzi del tutto.

Se Q è piccolo allora l'energia dissipata è molto elevata e il fenomeno oscillatorio si smorza prima di compiere un solo ciclo.

Per i tre diversi valori di R usati in fig. 52 il coefficiente di risonanza Q assume i valori:

$$Q_1 = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{R_1} = \frac{2\pi \cdot 5.88 \cdot 10^3 \cdot 3.3 \cdot 10^{-3}}{50} = 2.44$$

$$Q_2 = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{R_2} = \frac{2\pi \cdot 5.88 \cdot 10^3 \cdot 3.3 \cdot 10^{-3}}{100} = 1.22$$

$$Q_3 = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{R_3} = \frac{2\pi \cdot 5.88 \cdot 10^3 \cdot 3.3 \cdot 10^{-3}}{150} = 0.8$$

I risultati ottenuti confermano quanto ci aspettavamo; infatti, per valori più elevati di Q, il circuito tende a rimanere in oscillazione per più periodi e le oscillazioni si smorzano più lentamente; viceversa per piccoli valori di Q le oscillazioni si smorzano subito.

Oscillazioni libere smorzate: circuito RLC parallelo

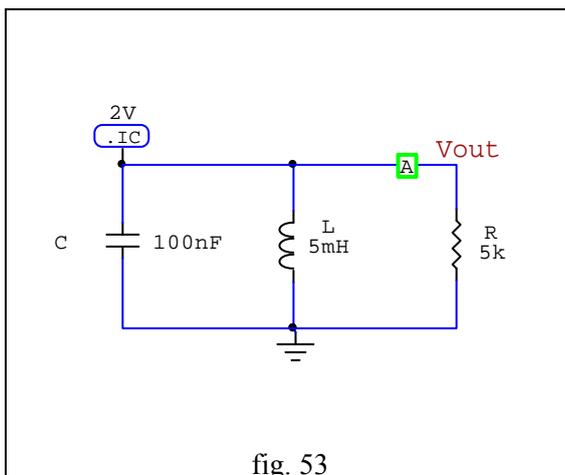


fig. 53

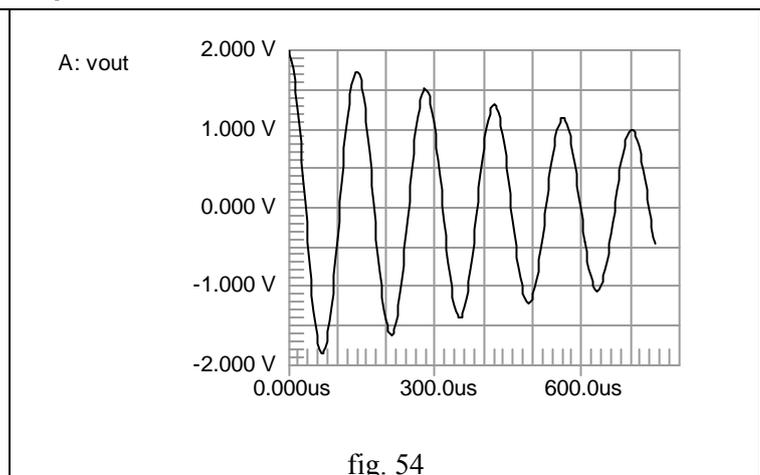


fig. 54

Nel circuito di fig. 53 la resistenza R è stata inserita in parallelo al blocco LC; anche in questo caso, l'energia che la bobina e il condensatore si scambiano va diminuendo ad ogni periodo, per via dell'energia dissipata dalla resistenza e le oscillazioni si smorzano anche in questo caso (fig. 54).

L'energia dissipata dalla resistenza ad ogni periodo è tanto più piccola quanto più elevata è la resistenza; in questo caso, infatti, la corrente che essa assorbe è piccola e il condensatore e la bobina si scaricano più lentamente.

In definitiva, nel circuito RLC parallelo, le oscillazioni libere si smorzano tanto più lentamente quanto più elevata è R; per questo motivo, il coefficiente di risonanza del circuito RLC parallelo è tanto più elevato quanto più grande è R. Esso, infatti, è definito come:

$$Q = \frac{R}{2\pi \cdot f_0 \cdot L} = 2\pi \cdot f_0 \cdot C \cdot R$$

In fig. 55 è mostrato il comportamento del circuito di fig. 53 per tre diversi valori di R; più precisamente per $R_1=3k\Omega$, $R_2=1.6k\Omega$, $R_3=200\Omega$ a cui corrispondono le tre diverse curve di fig. 55; come possiamo notare, al diminuire di R, le oscillazioni si smorzano più rapidamente. Nel nostro circuito, la frequenza di risonanza è:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-7}}} = \frac{10^5}{2\pi \cdot \sqrt{5}} = 7.11 \text{ kHz}$$

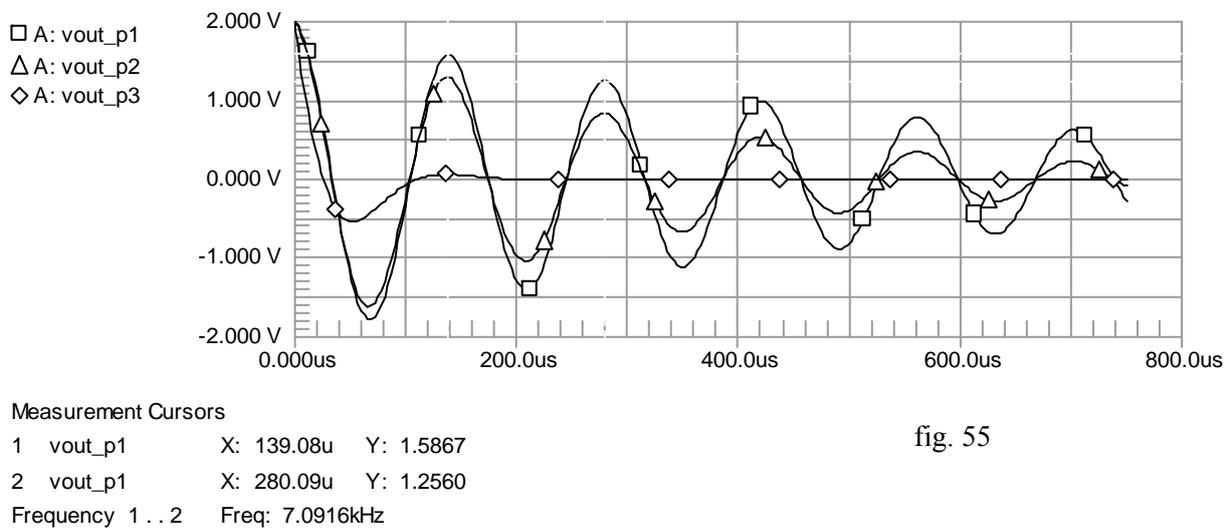


fig. 55

La simulazione di fig. 55 evidenzia una frequenza di 7.09kHz, molto vicina alle nostre previsioni. Ai tre diversi valori di R corrispondono altrettanti valori di Q; cioè:

$$Q_1 = \frac{R_1}{2\pi \cdot f_0 \cdot L} = \frac{3 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 7.11 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 13.4$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{2\pi \cdot f_0 \cdot L} = \frac{1.6 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 7.11 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 7.15$$

$$Q_3 = \frac{R_3}{2\pi \cdot f_0 \cdot L} = \frac{200}{2\pi \cdot 7.11 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0.89$$

Come mostra la fig. 55, al diminuire del coefficiente di risonanza Q, le oscillazioni si smorzano più rapidamente; per Q=0.89 esse si smorzano già dopo il primo ciclo.

Conclusione

I circuiti risonanti LC possono compiere:

- oscillazioni libere, in cui la bobina e il condensatore si scambiano l'energia per un tempo indefinito; ovviamente questa è una situazione ideale che, nella pratica, non si verifica.
- oscillazioni libere smorzate, in cui l'energia che la bobina e il condensatore si scambiano si va riducendo ad ogni periodo per via dell'energia dissipata dalla resistenza; le oscillazioni dopo un certo tempo si smorzano.
- oscillazioni forzate da un generatore esterno come nei filtri passa banda e notch; in questo caso le oscillazioni sono persistenti perché il generatore provvede a fornire l'energia dissipata dalla resistenza ad ogni periodo. La risposta del circuito risonante al generatore esterno è tanto più rilevante quanto più la frequenza del generatore si approssima a quella di risonanza; e infatti, non a caso, i circuiti LC hanno un comportamento selettivo.